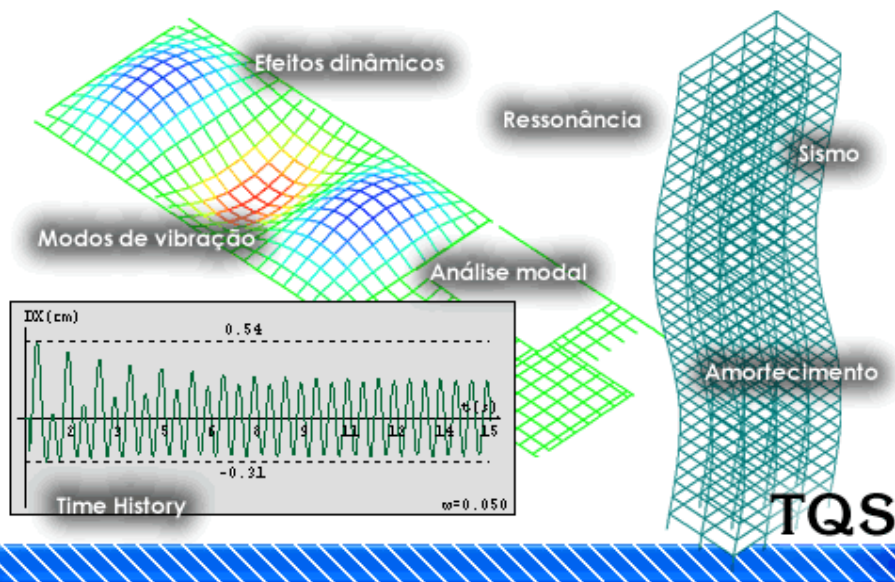


Dinâmica Aplicada em Estruturas de Concreto

Eng. Sérgio Stolovas

(para Engenheiros Estruturais)



TQS Informática

Dinâmica aplicada em estruturas de concreto

Sérgio Stolovas

Sumário

1	Preâmbulo	1
2	Introdução à Análise Vibracional de Estruturas	4
2.1	Descrição fenomenológica dos principais efeitos dinâmicos que afetam as estruturas:	4
2.2	Descrição dos elementos com os quais mexe a Dinâmica de Estruturas	5
2.3	Diferenças entre efeitos de ações estáticas e dinâmicas	6
2.4	Oscilações Livres.....	8
2.5	Oscilações com amortecimento viscoso	9
2.6	Características da Resposta à excitação harmônica de frequência f de um sistema com frequência natural f_n	10
2.7	Controle de resposta:	15
2.8	Introdução à Análise de Fourier	16
2.9	Noção de efeito de harmônicos superiores	19
3	Equações da Análise Vibracional de Estruturas.....	21
3.1	Oscilações Livres de um sistema de um grau de liberdade (com amortecimento viscoso).....	21
3.2	Exemplos de Histórias de Resposta:	24
3.3	Amplificação dinâmica:.....	24
3.4	Sistema de 1 grau de liberdade submetido a Movimento Harmônico da Base:	25
3.5	Fator de Transmissão de deslocamentos devidos a Movimento Harmônico da base:.....	26
3.6	Equações geral do movimento de uma estrutura de n- graus de liberdade: ..	28
3.7	Metodologias de cálculo Aproximado.....	39
3.7.1	Método de Rayleigh	39
3.7.2	Método de Dunkerley	41
3.7.3	Método de Newmark –Stodola – Vianello	42
3.7.4	Fórmulas aproximadas usuais que se derivam do método de Rayleigh ..	42
4	Efeitos dinâmicos gerados por equipamentos mecânicos.....	46

4.1	Introdução à problemática dos projetos de estruturas que sustentam máquinas	46
4.2	Classificação dos tipos de máquina	47
4.3	Classificação dos tipos de bases executadas em concreto armado.....	47
4.4	Análise de Estruturas que sustentam Máquinas Rotativas	48
4.4.1	Características da excitação	48
4.4.2	Efeito de rotor desbalanceado	50
4.4.3	Valores da Força devida à Excentricidade de Rotores de acordo a ISO 1940	52
4.4.4	Caracterização de projeto estrutural de bases para máquinas rotativas de baixa e média frequência	54
4.4.5	Características do roteiro de projeto estrutural de Bases para máquinas rotativas de alta frequência	54
4.5	Exemplo de Análise dinâmica da estrutura que sustenta uma Unidade de Compressão de Oxigênio	59
4.6	Modelo de interação dinâmica solo-estrutura para Fundação Direta Rígida de máquinas	63
4.7	Roteiro de análise de fundações superficiais de bases rígidas.	73
4.8	Parâmetros de molas nos modelos dinâmicos “discretizados” de bases retangulares de maquinaria de baixa frequência.	76
4.9	Modelos dinâmicos para fundação superficial em solos estratificados (<i>Baseado em valores obtidos por Richart, Hall and Woods</i>).....	82
4.10	Exemplo de avaliação analítica de uma base que sustenta um ventilador industrial	85
4.11	Bases de equipamentos sobre estacas	97
4.11.1	Importância e dificuldade da geração de modelos realistas	97
4.11.2	Parâmetros de resposta para modos verticais.....	99
4.11.3	Parâmetros de resposta para modos Horizontais.....	105
4.11.4	Efeitos de grupos de estacas	106
5	Efeitos dinâmicos gerados por atividades humanas	108
5.1	O ser humano como receptor de vibrações:	108
5.2	Seres humanos como geradores de excitações.....	109
5.2.1	Excitação devida a pessoas caminhando.....	109
5.2.2	Excitação devida a atividades rítmicas	110
5.2.3	Efeitos sobre passarelas.	111
5.2.4	Pessoas pulando e Excitação gerada pela multidão em uma arquibancada	112
5.2.5	Valores padronizados para a formulação da excitação gerada por atividades humanas por meio de superposição de excitações harmônicas	117

5.3	Exemplo de avaliação vibracional analítica de uma passarela para pedestres.	119
5.4	Exemplo de avaliação funcional simplificada de alternativas para uma laje	128
5.4.1	Na avaliação se levarão em conta efeitos de pessoas caminhando e de pessoas pulando.	128
6	Efeitos dinâmicos induzidos pelo vento	132
6.1	Introdução	132
6.2	Natureza da fonte de excitação	132
6.3	Forças estáticas equivalentes	133
6.4	Efeitos dinâmicos devidos à turbulência atmosférica (efeitos de rajadas)	134
6.5	Metodologia da Norma NBR 6123	137
6.6	Sinais e Espectros de Fourier	140
6.7	“Espectro de potência da velocidade do vento” ou “Função de densidade espectral de potência do vento”	147
6.8	Método do vento sintético	151
7	Análise sísmo-resistente de estruturas	154
7.1	Terremotos. Suas causas e mecanismos	154
7.2	Mapas de Risco Sísmico	163
7.3	Resposta Estrutural	164
7.4	Espectros de resposta	167
7.5	Espectro dúctil de projeto	170
7.6	Método de Análise Multi-modal	174
7.7	Mitigação do dano sísmico e a eficiência da engenharia civil na mesma.	176
7.8	Dano não estrutural	189
Anexo A.	Excentricidades típicas de rotores	192
Anexo B.	Tabelas de referência para qualificar o nível de resposta de maquinarias	193
B.1.	VDI 2054	193
B.2.	Rathbone Chart	195
B.3.	Michael Blake	196
B.4.	Norma IRD	197
Anexo C.	Níveis de Percepção Humana de Vibrações	198
C.1.	Níveis de percepção humana de vibrações. Os valores indicados são acelerações pico para pessoas paradas submetidas a vibrações verticais...	198
C.2.	ISO 2631-2 - Acelerações pico máximas recomendadas para conforto humano.	198
C.3.	ISO 2631-1	199

C.4.	ISO 2631-1.....	200
C.5.	DIN 4150-4.....	201
Anexo D.	Valores recomendados para serem empregados na avaliação funcional de Efeitos de Atividades Humanas.....	202
Anexo E.	Unidades logarítmicas de amplitude vibracional	203
Anexo F.	Revisão de diretivas de verificação de fadiga de acordo à Norma ABNT NBR 6118-2003	206
F.1.	Revisão de parâmetros básicos	206
F.1.1.	Concreto.....	206
F.1.2.	Armadura	207
F.2.	Revisão dos estados de carga normativos.....	207
F.2.1.	Estado Limite Último ELU ($\gamma_f = 1.4$).....	207
F.2.2.	Estado Limite de Serviço ELS ($\gamma_f = 1.0$).....	209
F.2.3.	Estado limite de Fadiga.....	210
Anexo G.	Séries de Fourier	219
Anexo H.	Transformadas de Fourier	223
Anexo I.	Aceitabilidade de acelerações induzidas por atividades humanas de acordo a ISO 2631-2	228
Anexo J.	Exemplos de cálculo – Parte 1.....	230
Anexo K.	Bibliografia.....	251

1 Preâmbulo

Equilíbrio de forças é a letra A no abecedário do engenheiro de estruturas. Agregando ao equilíbrio global e das partes a continuidade das mesmas, faz-se possível na estática atingir quase qualquer resposta que o engenheiro procura saber sobre a estrutura.

Por utilizar sempre problemas de estática, o engenheiro de estruturas está habituado a certos ditames, que estão incorporados solidariamente à sua intuição. Essa intuição é fundamental para a visualização do comportamento estrutural, mas pode ser fonte de engano se não adaptarmos esta intuição à dinâmica.

Se uma estrutura estiver submetida unicamente à ação de certo sistema de forças, e subitamente deixasse de estar submetida às mesmas, a deformação deverá mudar e as partes da estrutura deverão se deslocar. Pode se intuir que a estrutura vai se deslocar numa direção conforme a nova deformação que responde à ausência dessas cargas que já sumiram. Teremos que a nossa estrutura já não estará submetida às forças, mas ainda estará deformada. Ou seja, que em dinâmica o ditame que associa necessariamente deformação às forças deixa de ser correto. A evolução no raciocínio do engenheiro para adaptar a sua intuição à dinâmica passa por assumir que o que determinará as solicitações internas será a deformação, e que o “sacro” equilíbrio global e das partes da estrutura não estará já vigente (no seu significado estático).

O “Curso de Dinâmica Aplicada em Estruturas de Concreto” é destinado a Engenheiros que possuem formação e experiência no desenvolvimento e cálculo de projetos de estruturas, e procuram incorporar as ferramentas da análise dinâmica nos projetos futuros.

A “estruturação” do curso visa aproveitar ao máximo o conhecimento e a experiência em análise e projetos de estruturas que já possui o engenheiro, para assim incorporar de maneira eficiente os conceitos e ferramentas de cálculo da dinâmica de estruturas.

Nas 16 intensas horas de trabalho conjunto com os participantes do curso se pretende incorporar os novos conceitos de maneira pragmática, objetiva e intuitiva. Para isso é sacrificado muito do que o “rigor científico” demandaria no desenvolvimento dos temas, mas abrindo todo o espaço possível aos atalhos pelos quais a intuição sabe nos conduzir até a compreensão. Todo o esforço está justamente orientado à compreensão dos conceitos, das metodologias de análise e das estratégias de projeto.

O final de cada tema é exposto com exemplos concretos de modo que as novas ferramentas incorporadas ao sistema CAD/TQS permitem abordar os problemas de dinâmica de estrutura, modelar as ações e analisar as respostas estruturais. Com isso o participante do curso pode visualizar que não se está ante uma disciplina completamente diferente, e que na realidade consiste em um melhoramento da nossa mesa de trabalho.

Da interação com os participantes surge o roteiro final de cada curso. Cada curso se adapta para que o resultado seja mais adequado e mais proveitoso para o grupo conformationado pelos participantes do mesmo, sem descuidar atingir o objetivo. Por isso NUNCA o curso segue estritamente a ordem nem abarcará exatamente o conteúdo da presente apostila.

A presente apostila procura fornecer a guia e a documentação para o participante não precisar tomar notas de tudo o que é explicado. A apostila inclui também muitos pontos que não serão desenvolvidos durante o curso, visando propiciar o estudo futuro para uma melhor “fermentação” dos novos conceitos e para abrir mais portas ao conhecimento complementando o conteúdo da matéria tratada.

“Existem dois caminhos para estudar um problema. Eles são: o do cientista e o do engenheiro. O cientista somente está interessado na verdade. Para ele existe somente uma resposta: a verdadeira, e não importa quanto tempo leve chegar a ela. Para o engenheiro existem muitas respostas possíveis, todas elas são compromissos entre a verdade e o tempo. O engenheiro deve dar uma resposta agora, e ela deve ser suficientemente boa para certo propósito, mesmo quando ela não seja estritamente verdadeira. É por isso que o engenheiro deve fazer suposições. Suposições que em muitos casos ele bem sabe que não são estritamente certas, mas elas permitem obter uma resposta suficientemente verdadeira aos efeitos do seu propósito imediato.”

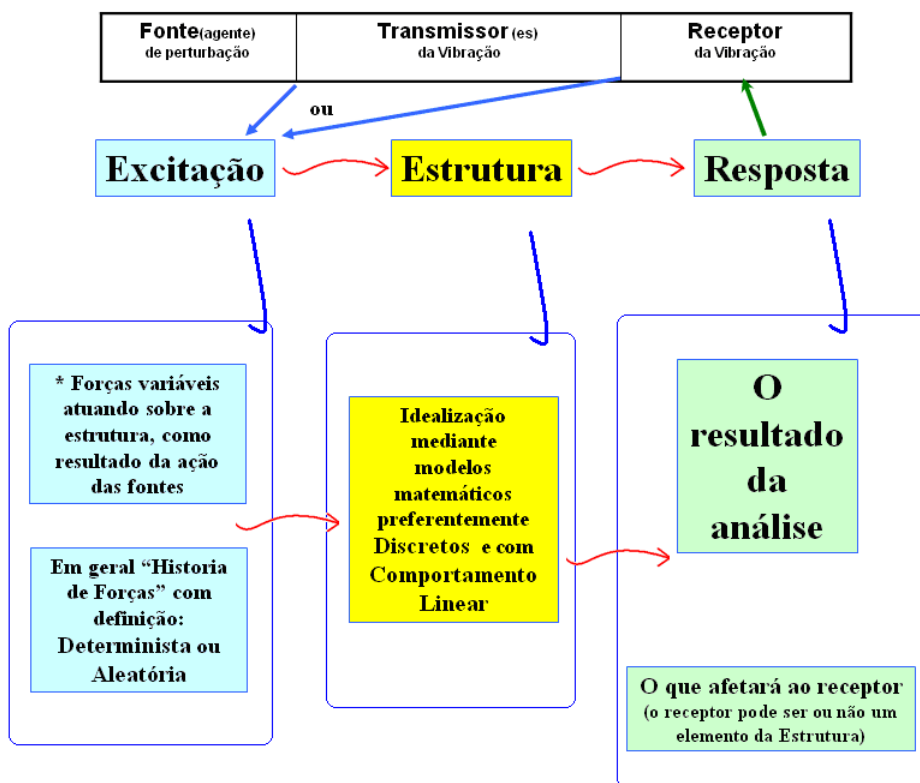
Engenheiro Anônimo

2 Introdução à Análise Vibracional de Estruturas

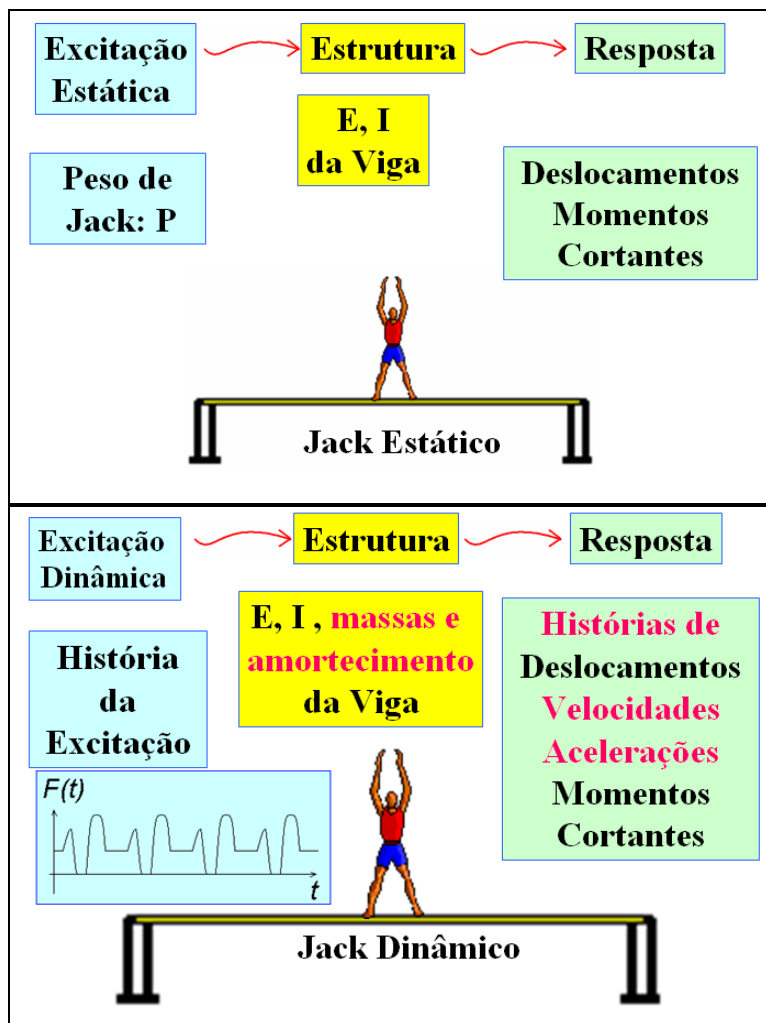
2.1 Descrição fenomenológica dos principais efeitos dinâmicos que afetam as estruturas:

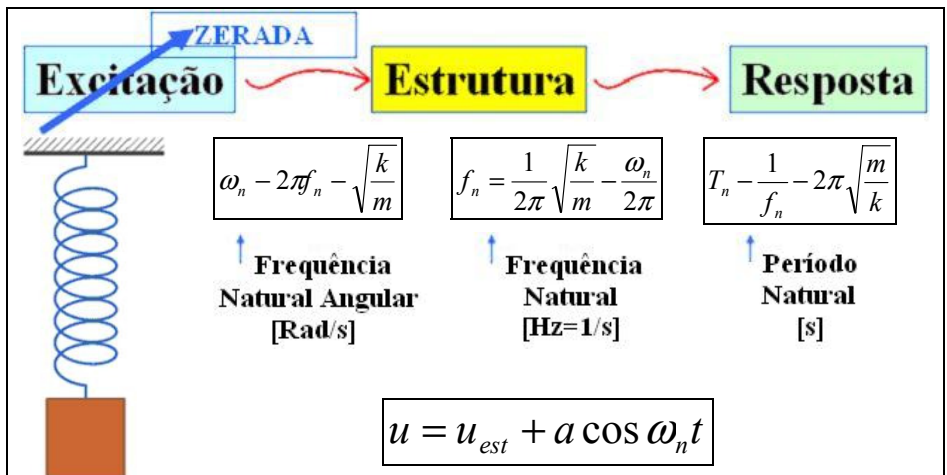
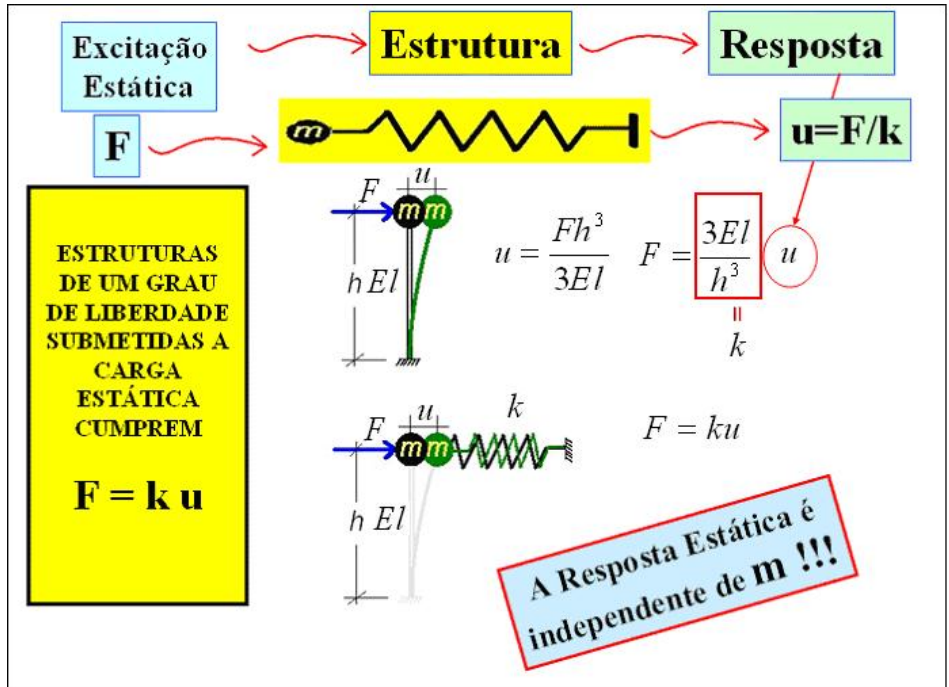
Fonte(agente) de perturbação		Transmissor (es) da Vibração	Receptor da Vibração
Fonte local	Equipamento (mecânico)	Estrutura do edifício – elementos não estruturais do edifício	Estrutura-Conteúdo do edifício (elementos não estruturais, moveis, equipamento, etc.) <u>PESSOAS</u>
	Atividade de seres humanos		
Fonte externa	Veículos transitando na Rua	(Estrutura externa) – SOLO	
	Ferrovias	- Estrutura do edifício - elementos não estruturais do edifício	
	Metrô		
	Equipamento para obras civis		
	Outros	Sísmicos – Explosões	
		Vento – Booms Sônicos - Blast	
		SOLO – Água - SOLO	
		AR	

2.2 Descrição dos elementos com os quais mexe a Dinâmica de Estruturas

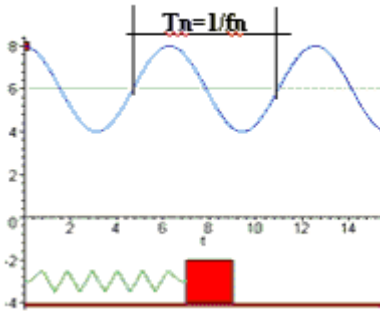


2.3 Diferenças entre efeitos de ações estáticas e dinâmicas





2.4 Oscilações Livres

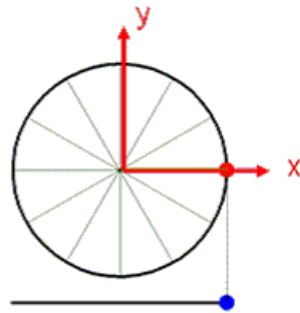


$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad T_n = \frac{1}{f_n}$$

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{2\pi}{T_n}$$

$$u = a \cos(\omega_n t) = a \cos(2\pi f_n t) = \left(\frac{2\pi}{T_n} t \right)$$

O Movimento Harmônico de amplitude a e frequência angular ω pode ser visualizado como a projeção em um eixo do movimento circular uniforme de raio a e velocidade ω



mais rígido → mais rápido vibra → maior frequência própria

mais massa → mais devagar vibra → menor frequência própria

$$u = a \cos(\omega_n t)$$

Por que teria que ser senoidal,
e não qualquer outra
“coisa periódica”!!!?

Já que a “história harmônica” é a que permite que a energia total do “sistema mola-massa” seja a mesma para cada instante da trajetória!!!

- Energia Potencial elástica $U = 1/2 k u^2$ $U_0 = 1/2 k a^2$
- Energia Cinética $K = 1/2 m v^2$ $K_0 = 1/2 m 0^2$

$$\omega^2 = k/m$$

$$u = a \cos(\omega t) \quad u^2 = a^2 \cos^2(\omega t)$$

$$v = \frac{d_u}{d_t} = -a\omega \sin(\omega t) \quad v^2 = a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

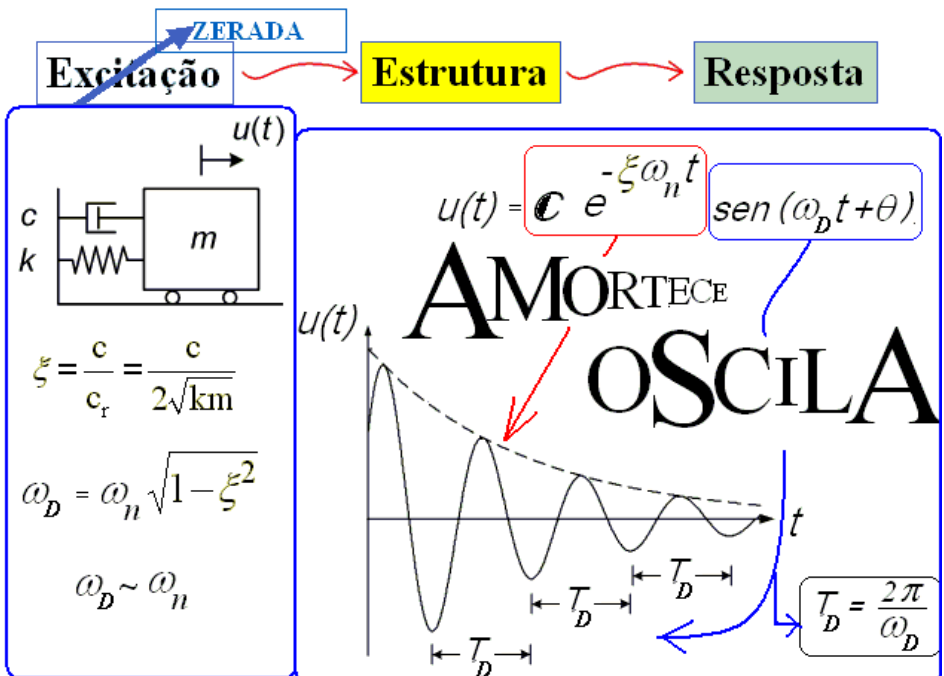
$$U + K = U_0 + K_0 = 1/2 k a^2$$

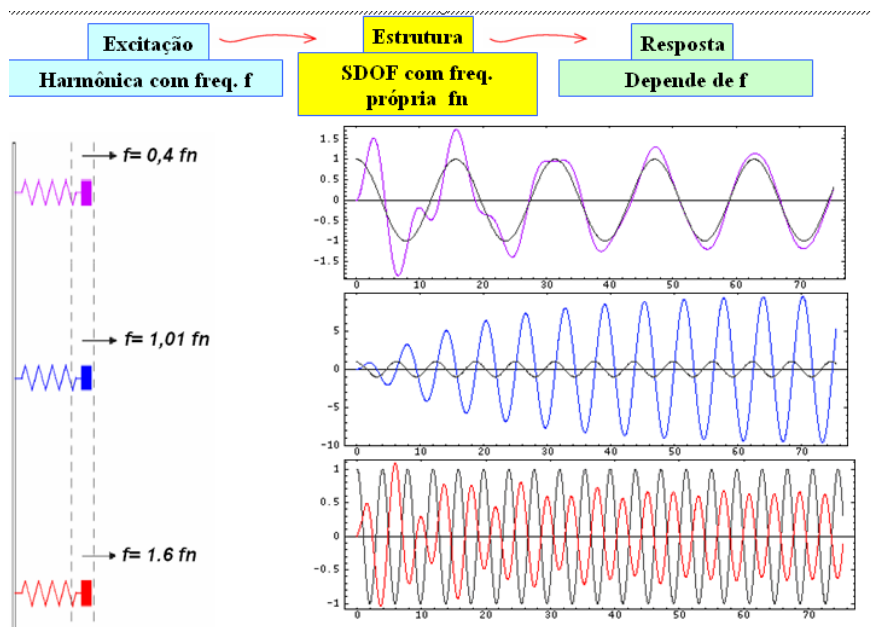
$$U + K = 1/2 k a^2 \cos^2(\omega t) + 1/2 \boxed{m} \boxed{a^2} \boxed{\omega^2} \sin^2(\omega t) = 1/2 k a^2$$

$= k$

$$U(t) + K(t) = \text{const.}$$

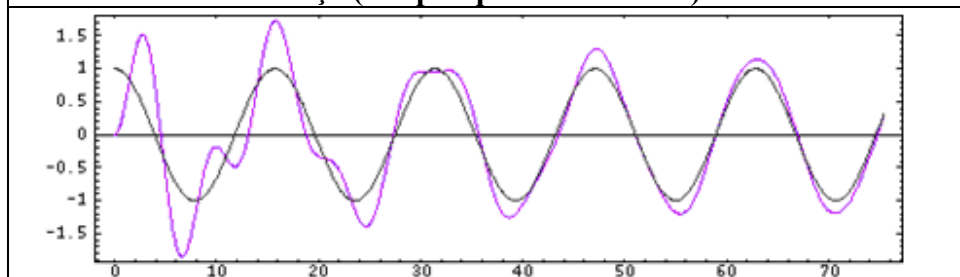
2.5 Oscilações com amortecimento viscoso



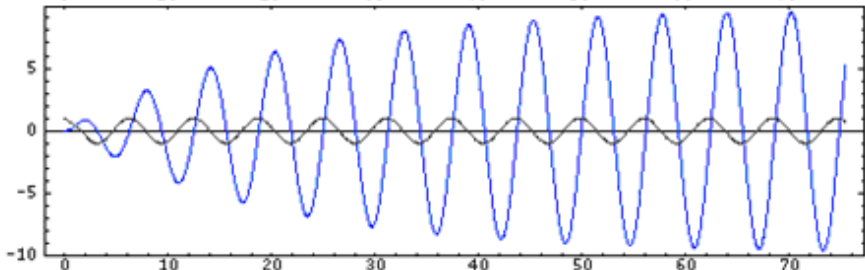


2.6 Características da Resposta à excitação harmônica de frequência f de um sistema com frequência natural f_n

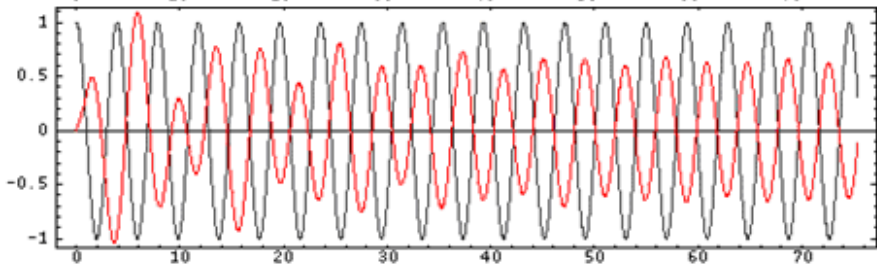
Para $f \ll f_n$ a resposta no estacionário está quase em fase com a força (um pouquinho atrasada)



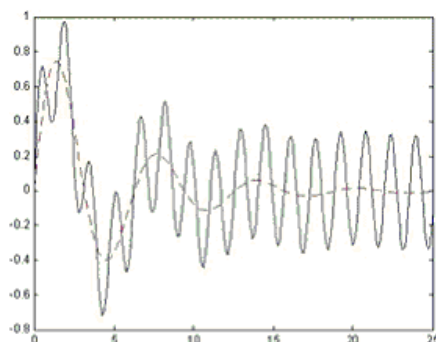
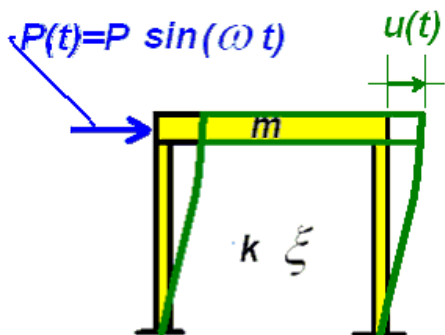
**Para $f = f_n$ a resposta fica atrasada uma fase de $\frac{1}{4}$ ciclo
($90^\circ = \pi/2$)**



**Para $f \gg f_n$ a resposta está atrasada uma fase de quase $\frac{1}{2}$ ciclo
($180^\circ = \pi$)**



Muito Importante!:
**A frequência da resposta no estacionário coincide sempre
com a frequência da excitação**



Resposta total	=	Resposta transiente	+	Resposta estacionária	
$U(t) = C_e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_D t + \theta) + \frac{p/k}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega/\omega_n)]^2}} \sin(\omega t - \phi)$					
		Resposta estática			

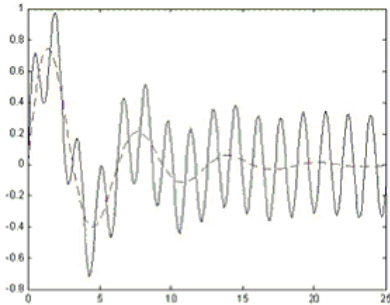
Ao cabo de alguns ciclos o transiente apaga e a resposta será:

- a) senoidal ,
- b) com a frequência da excitação,
- c) com amplitude dependente não somente da amplitude P e da rigidez k, mas também do amortecimento e da relação entre frequências de excitação e frequência própria da estrutura.
- d) Com um atraso (fase ϕ).

Resposta total = Resposta transiente + Resposta estacionária

$$U(t) = C e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_D t + \theta) + \frac{p/k}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega/\omega_n)]^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

Resposta estática



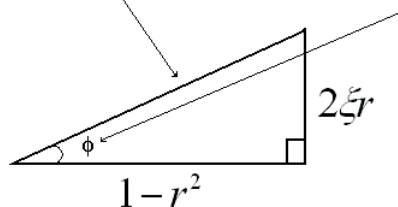
Em quase todos os casos o interesse será exclusivamente e na parte Estacionária da resposta.

$$u(t) \sim \frac{p}{k\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

$\phi = \text{fase}$



$$u_{\text{estático}} = P/k$$

$$\text{amplitude } [u(t)] \sim \frac{u_{\text{estático}}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Fator de amplificação

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

No estacionário:

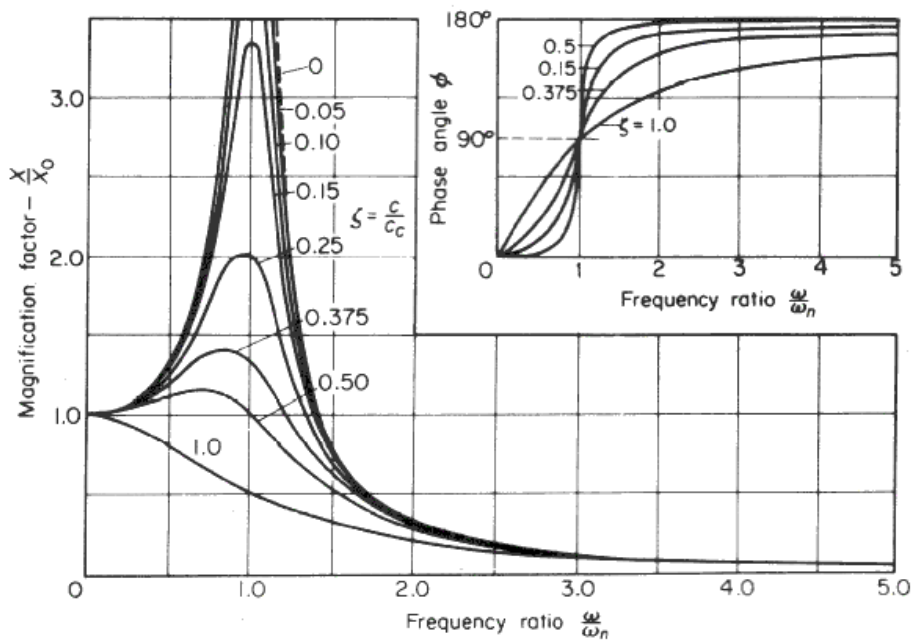
$$u(t) \sim \frac{p}{k\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} - \text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\text{tg } \phi = \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Obs:**Em ressonância:**

$$\text{Fator de amplificação} = \frac{1}{2\xi}$$



2.7 Controle de resposta:

$$x(t) = \frac{\delta_{st} \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} + e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ A_1 \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) + A_2 \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) \right\}$$

$\Downarrow$

Estacionária Senoidal
Não apaga!

$\Downarrow$

Transiente
Apaga!

Para $r \gg 1 \rightarrow |x(t)| \sim \frac{\delta_{st}}{r^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega^2} F_0 / k = \frac{F_0}{m \omega^2} \rightarrow$ Resposta controlada pela massa

Aumento a massa para aumentar r , δ_{st} fica na mesma.

(Diminuindo k aumentaria r , mas também δ_{st})

Para $r \ll 1 \rightarrow |x(t)| \sim \delta_{st} F_0 / k \rightarrow$ Resposta controlada pela rigidez

Quase-estático! Aumento k para diminuir δ_{st} . Diminui r , mas a contribuição não é muito relevante.

Para $r=1 \rightarrow |x(t)| \sim \frac{\delta_{st}}{2\zeta} \rightarrow$ Resposta controlada pelo amortecimento

O incremento do Amortecimento resulta eficiente somente se estiver perto de ressonância!

RESUMINDO:

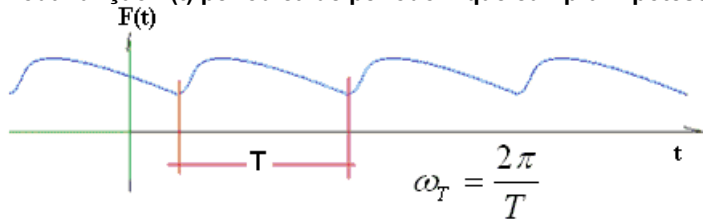
- a) Quando temos uma excitação harmônica atuando sobre um sistema de um grau de liberdade, a resposta estacionária será também harmônica, e sempre com a mesma frequência da excitação, sempre atrasada e “amplificada ou diminuída”.
- b) A fase e a amplitude da resposta estacionária estarão influenciadas pelos parâmetros:
 - amplitude da excitação,
 - rigidez do sistema,
 - fator de amortecimento,
 - razão entre a frequência da excitação e a própria do sistema.
- c) Em geral estamos interessados somente na resposta estacionária. Somente para efeitos de impacto o interesse se centrará na resposta transiente.
- d) A superposição de excitações coadjuvantes terá como resposta a soma das respostas resultantes das excitações individuais.

2.8 Introdução à Análise de Fourier

A razão pela qual as respostas a excitações harmônicas são tão importantes é que:

Qualquer excitação relevante poderá ser expressa (mediante a análise de Fourier) como soma de excitações harmônicas:

Toda função $F(t)$ periódica de período T que cumpra Hipóteses de regularidade



Poderá ser expressada da maneira
$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega_T t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n\omega_T t dt$$

O que resulta equivalente a dizer que qualquer $F(t)$ que cumpra as hipóteses de regularidade poderá se expressar como :

$$F(t) = \boxed{\frac{a_0}{2}} + \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_T t - \phi_n)} \text{ com } C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \phi_n = -ar \tan \frac{a_n}{b_n}$$

É a média da Função no intervalo

É uma combinação linear de infinitas funções harmônicas de frequências múltiplas da frequência de $F(t)$: $w, 2w, 3w, 4w, \dots$

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_T t - \phi_n)$$

O 1º termo não nulo se chama Harmônico Fundamental ($n=1$), e os seguintes Harmônicos Superiores.

C_n é o coeficiente de Fourier para a frequência " $n\omega_T$ " e representa a magnitude de $F(t)$ nesse Harmônico.

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega_T t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n\omega_T t dt$$

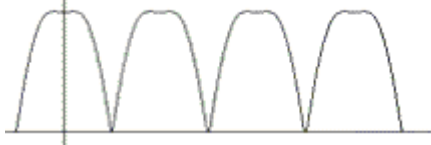
$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_T t - \phi_n)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \phi_n = -ar \tan \frac{a_n}{b_n}$$

Casos simplificados:

Função periódica Par

Se F é par, $F(t) = F(-t)$

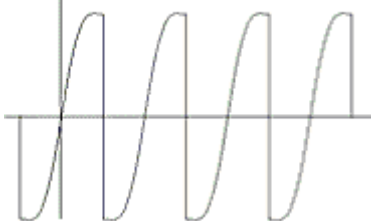


$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_T t)$$

Soma de COSENOS

Função periódica Ímpar

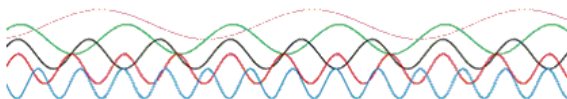
Se F é ímpar, $F(t) = -F(-t)$



$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin n\omega_T t)$$

Soma de SENOS

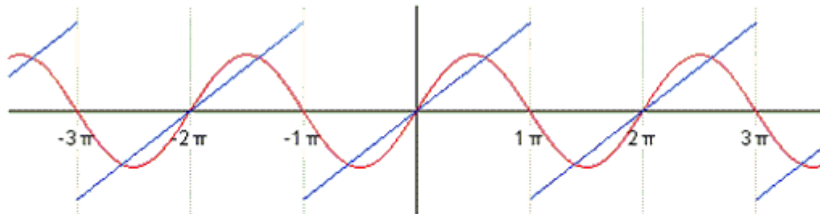
Nestes casos resulta uma
Combinação linear de
Harmônicos com frequência
Múltipla de ω_T , e em fase !



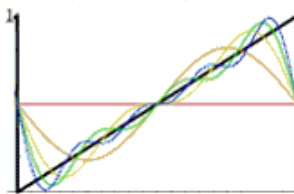
F(t) IMPAR

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_T t - \phi_n)$$

$$\sim C_1 \sin \omega_T + C_2 \sin 2\omega_T + C_3 \sin 3\omega_T + \dots + C_n \sin(n\omega_T t)$$

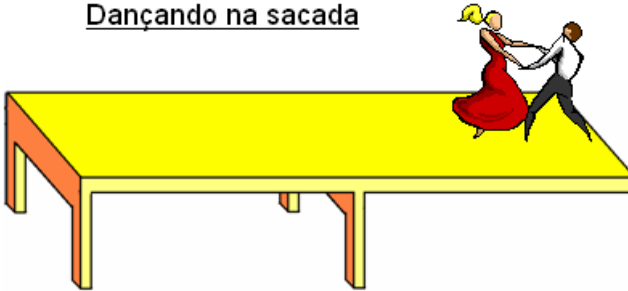


Sawtooth



2.9 Noção de efeito de harmônicos superiores

Dançando na sacada



O casal pesa com toda a roupa 130 kg

A excitação para o caso da dança com frequência diretriz de 2,67 Hz será a superposição de 3 componentes harmônicas $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ com frequências:

$f_1 = 2,67 \text{ Hz}$, $f_2 = 5,32 \text{ Hz}$, e $f_3 = 8,01 \text{ Hz}$,

cujas amplitudes serão

$F_1 = 130 \times 1,228 = 159,6 \text{ kgf}$, $F_2 = 130 \times 0,311 = 40,4 \text{ kgf}$, $F_3 = 130 \times 0,032 = 4,2 \text{ kgf}$.

Se $f_n = 5,32 \text{ Hz}$

Fator de amplificação	$= \frac{1}{2\xi}$
-----------------------	--------------------

Para $\xi = 0.02$, esses 40,4 kgf podem equivaler a: $F_{eq} = 40,4 \times 25 = 1010 \text{ kgf!}$

→

$$\begin{aligned} &\downarrow F_3(t) = 4,2 \cos(50,31t) \\ &\downarrow F_2(t) = 40,4 \cos(33,55t) \\ &\downarrow F_1(t) = 159,6 \cos(16,77t) \\ &\downarrow F_0 = 130 \end{aligned}$$



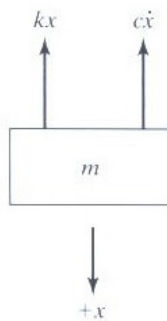
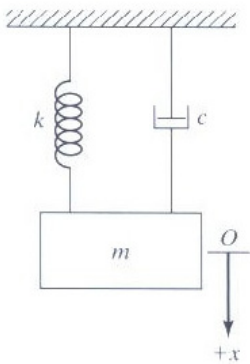
RESUMINDO:

- a) Sistemas de um grau de liberdade submetidos a Histórias Harmônicas de excitação resultam em respostas (que podemos calcular) cujo estacionário é também Harmônico, e cuja frequência é a frequência da excitação, atrasada e “amplificada ou diminuída”.
- b) Toda excitação periódica com história conhecida pode ser formulada graças a FOURIER como superposição de excitações harmônicas. Para obter a resposta ficaria somente somar os efeitos dessas excitações harmônicas. Mais na frente veremos que a análise de Fourier pode ser generalizado para excitações que não sejam necessariamente periódicas.
- c) O Espectro de Frequências de uma excitação basta para poder estimar a resposta, Para chegar às histórias de resposta exatas deveríamos também conhecer as “fases” dos diferentes harmônicos da excitação.

3 Equações da Análise Vibracional de Estruturas

3.1 Oscilações Livres de um sistema de um grau de liberdade (com amortecimento viscoso)

(Todo curso de dinâmica deve começar assim, o nosso não, mas a apostila sim).



$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

A equação do movimento:

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Df. Freqüência Angular Natural

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

Df. Amortecimento crítico:

$$c_c = \sqrt{mk} = 2m\omega_n$$

Df. Fator de amortecimento

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{c_c}$$

Aos efeitos dos casos habituais na engenharia civil:

$$0 < \zeta < 1$$

As raízes da equação características associadas à equação do movimento serão

$$S_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \cdot \omega_n$$

A solução geral poderá ser escrita da maneira:

$$x(t) = c_1 \cdot e^{S_1 t} + c_2 \cdot e^{S_2 t} = x_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t - \varphi_0)$$

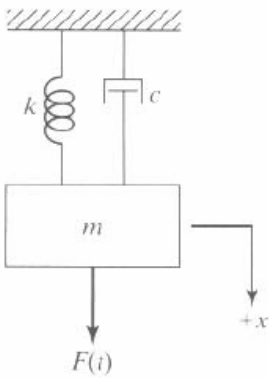
$$x_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_n} \right)^2}$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left[-\frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{x_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \right]$$

Df: Frequência Angular Natural Amortecida

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$$

Sistema de 1 grau de liberdade submetido a excitação harmônica



$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + f(t)$$

$$\therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$f(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$F_0/k = \delta_{st}$$

δ_{st} = resposta estática

$$x(t) = \frac{\delta_{st} \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} + e^{-\zeta \omega_n t} \{A_1 \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t) + A_2 \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t)\}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right)$$

A_1 e A_2 dependem das condições iniciais.

A resposta estacionária não depende das condições iniciais.

Para t suficientemente grande:

$$x(t) \sim \frac{\delta_{st} \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

Onde δ_{st} é a resposta estática:

$$F_0/k = \delta_{st}$$

Resulta interessante observar que:

Para $r \gg 1 \rightarrow |x(t)| \sim \frac{\delta_{st}}{r^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega^2} F_0/k = \frac{F_0}{m\omega^2} \rightarrow$ Resposta controlada pela massa.

Para $r \ll 1 \rightarrow |x(t)| \sim \delta_{st} = F_0/k \rightarrow$ Resposta controlada pela rigidez.

Para $r = 1 \rightarrow |x(t)| \sim \frac{\delta_{st}}{2\zeta} \rightarrow$ Resposta controlada pelo amortecimento.

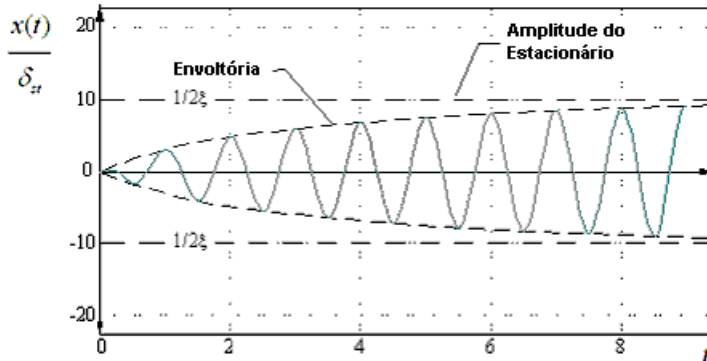
Ou seja,

- Se um sistema estiver submetido a uma excitação com frequência muito maior que a própria ($r \gg 1$), a maneira mais eficiente de diminuir a resposta será incrementando a massa. (ex. turbo-máquinas sobre estrutura).

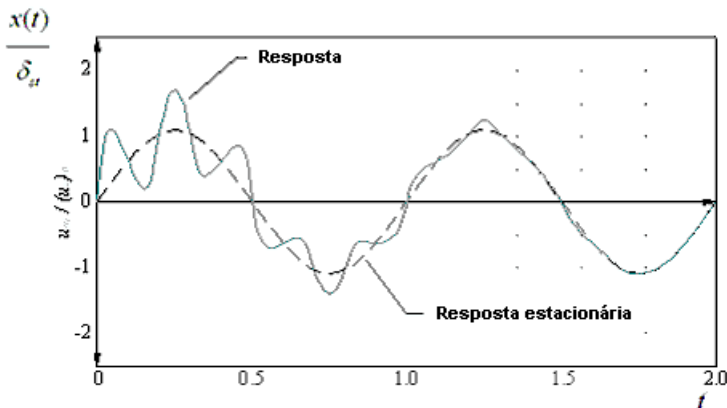
- Se um sistema estiver submetido a uma excitação com frequência muito menor que a própria ($r \ll 1$), a maneira mais eficiente de diminuir a resposta será incrementando a rigidez. (ex. efeitos de vento e efeitos de atividades humanas, com estruturas não demasiadas flexíveis). A resposta é basicamente estática.

- se um sistema estiver submetido a uma excitação em ressonância, a maneira mais eficiente de controlar a resposta é mediante o incremento do amortecimento. Na realidade “mexer com o amortecimento” não é simples, e resulta um parâmetro difícil de governar assertivamente, e com problemáticas especiais para sistemas de mais de um grau de liberdade.

3.2 Exemplos de Histórias de Resposta:



Historia de resposta de deslocamento de um sistema com $\zeta=0.05$, submetido a excitação harmônica em ressonância ($r=1, \omega = \omega_n$)



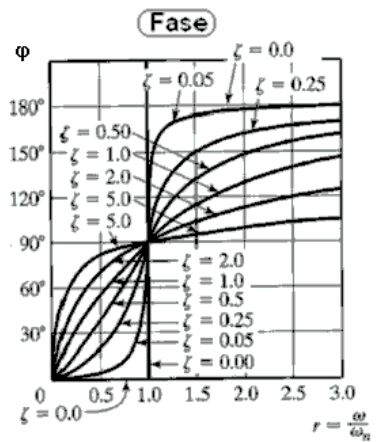
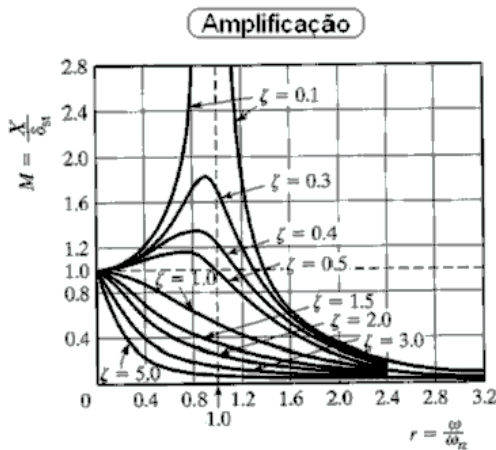
Historia de resposta de deslocamento de um sistema amortecido, submetido a excitação harmônica de baixa frequência.

3.3 Amplificação dinâmica:

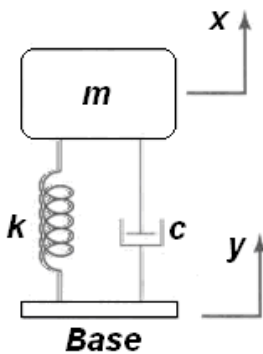
$$M = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (\omega/\omega_n)^2\}^2 + \{2\zeta(\omega/\omega_n)\}^2}}$$

A **Fase** da resposta respeito da excitação ficará determinada por:

$$\tan \varphi = \left(\frac{2\zeta r}{1-r^2} \right)$$



3.4 Sistema de 1 grau de liberdade submetido a Movimento Harmônico da Base:



Seja o deslocamento da base:

$$m\ddot{x} = -k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y})$$

$$\therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

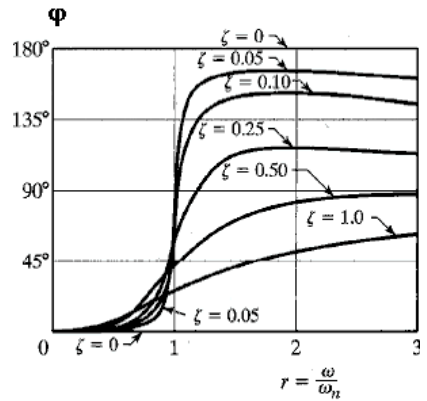
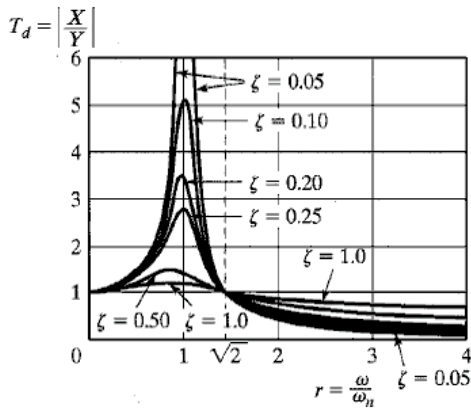
As soluções estacionárias resultam:

Nos casos particulares de Movimento senoidal e Movimento cosenoidal da Base:

Para $y(t) = Y \sin \omega t$ $x_p(t) = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \sin(\omega t - \varphi + \alpha)$	Para $y(t) = Y \cos \omega t$ $x_p(t) = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta i)^2}}{\sqrt{(1 - i^2)^2 + (2\zeta i)^2}} \cos(\omega t + \alpha - \varphi)$
$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right), \quad \alpha = \tan^{-1} (2\zeta r)$	

3.5 Fator de Transmissão de deslocamentos devidos a Movimento Harmônico da base:

$$T_d = \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$



Sistema de 1 grau de liberdade submetido a excitação periódica

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$F(t)$ de período T . Devido a Fourier:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\alpha t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\alpha t)$$

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \cos(n\alpha t) dt \quad n=0,1,2 \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \sin(n\alpha t) dt \quad n=1,2,3 \dots$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\alpha t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\alpha t)$$

A resposta estacionária será superposição das respostas estacionárias das $n+1$ equação:

Equações	Respostas
----------	-----------

$m\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 = a_0/2$ $m\ddot{x}_{cn} + c\dot{x}_{cn} + kx_{cn} = a_n \cos(n\omega t) \quad n=1,2,3,..$ $m\ddot{x}_{sn} + c\dot{x}_{sn} + kx_{sn} = b_n \sin(n\omega t) \quad n=1,2,3,..$	$x_0^{(p)}(t) = \frac{a_0}{2k}$ $x_{cn}^{(p)}(t) = \frac{a_n/k}{\sqrt{(1-n^2r^2)^2 + (2\zeta nr)^2}} \cos(n\omega t - \varphi_n)$ $x_{sn}^{(p)}(t) = \frac{b_n/k}{\sqrt{(1-n^2r^2)^2 + (2\zeta nr)^2}} \sin(n\omega t - \varphi_n)$ $\varphi_n = \tan^{-1} \left\{ \frac{2\zeta nr}{1-n^2r^2} \right\}$ $r = \omega/\omega_n, \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$x(t) = x_h(t) + x_0^{(p)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} x_{cn}^{(p)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} x_{sn}^{(p)}(t)$ $= x_h(t) + \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos(n\omega t - \varphi_n - \psi_n)}{\sqrt{(1-n^2r^2)^2 + (2\zeta nr)^2}}$ $A_n = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{k} \quad \psi_n = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)$ * $x_h(t)$ = solução geral da equação homogênea = oscilações livres	

3.6 Equações geral do movimento de uma estrutura de n- graus de liberdade:

Desejamos achar a resposta da estrutura a uma excitação $F(t)$. Isso significa resolver a equação matricial (deslocamentos $x(t)$ em função da excitação $F(t)$):

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

$$\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} \quad \{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & m_n \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Ou seja, que equivale a um sistema de n equações cuja equação genérica é:

$$m_i \ddot{x}_i + c_{i1} \dot{x}_1 + c_{i2} \dot{x}_2 + \dots + c_{in} \dot{x}_n + k_{i1} x_1 + k_{i2} x_2 + \dots + k_{in} x_n = F_i(t)$$

Em cada equação aparecem deslocamentos de coordenadas diferentes e suas derivadas. O que não é nada animador para quem deseja saber o que acontece com o deslocamento para cada uma das coordenadas!

Se pudermos achar uma transformação lineal do tipo:

$$\{x\} = [\Phi] \{z\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{Bmatrix}$$

que cumpra que as seguintes matrizes resultem diagonais:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & M_j & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_n \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & C_j & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & K_j & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n \end{bmatrix}$$

A substituição de:

$$\{\ddot{x}\} = [\Phi]\{\ddot{z}\}, \quad \{\dot{x}\} = [\Phi]\{\dot{z}\}, \quad \{x\} = [\Phi]\{z\}$$

na equação original resultará em:

$$[M] [\Phi]\{\ddot{z}\} + [C] [\Phi]\{\dot{z}\} + [K] [\Phi]\{z\} = \{F\}$$

Pré-multiplicando por $[\Phi]^T$:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi]\{\ddot{z}\} + [\Phi]^T [C] [\Phi]\{\dot{z}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi]\{z\} = [\Phi]^T \{F\}$$

Que devido à suposição feita anteriormente ficará da maneira:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & M_j & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \{\ddot{z}\} + \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & C_j & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \{\dot{z}\} + \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & K_j & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \{z\} = [\Phi]^T \{F\}$$

Ou seja, n equações diferenciais independentes; uma equação para cada modo j:

$$M_j \ddot{z}_j + C_j \dot{z}_j + K_j z_j = \sum_{i=1}^n F_i \phi_{ij} \quad i=1,2,3,\dots$$

Cujas soluções $Z_j(t)$ podemos achar, já que são equações de movimento de sistemas de 1 grau de liberdade:

Uma vez calculadas as funções “ z_j ”, poderemos achar as “ x ” :

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} z_j(t)$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = Z_1(t) \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{Bmatrix} + Z_2(t) \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{Bmatrix} + \dots + Z_n(t) \begin{Bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{Bmatrix}$$

Em definitiva: “se tivermos” uma matriz como $[\Phi]$ teremos achado uma maneira simples de chegar à resposta.

Essa matriz existe e se chama **matriz modal**.

Formas modais, frequências modais e matriz modal

Começaremos por analisar um sistema livre sem amortecimento cuja equação de movimento é:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{O\}$$

Procuraremos achar soluções que tenham a forma:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix} S(t) = \{\phi\} S(t) \quad , \text{ com } S(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

← **Independente de T**

$$\left(\{ \ddot{x} \} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix} S(t) = \{\phi\} \ddot{S}(t) \right)$$

← **Independente de T**

Substituindo na equação do movimento:

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{\phi}\} + [K]\{\phi\} &= \{O\} \\ [[M]\ddot{\phi} + [K]\phi] &= \{O\} \end{aligned}$$

Como

$$\ddot{S}(t) = -\omega^2 S(t)$$

Resulta:

$$[-\omega^2[M] + [K]]S(t)\{\phi\} = \{O\}$$

O que implica que deverá se cumprir:

$$[-\omega^2[M] + [K]]\{\phi\} = \{O\} \quad [K]\{\phi\} = \omega^2[M]\{\phi\} \quad [M]^{-1}[K]\{\phi\} = \omega^2\{\phi\}$$

Que é um problema matricial de valores próprios da aplicação lineal definida pela matriz:

$$[M]^{-1}[K]$$

$\{\phi\}$ será vetor próprio dessa aplicação com valor próprio “(quadrado de ω)”.

Da necessidade de “existência de soluções não triviais” da equação:

$$[-\omega^2[M] + [K]]\{\phi\} = \{O\}$$

Resulta a equação que proporciona as frequências, chamada também “equação característica”:

$$\det[-\omega^2[M] + [K]] = O$$

$$\det = \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} - \omega^2 m_2 & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} - \omega^2 m_n \end{bmatrix} = O$$

Esta equação terá a forma

$$a_N \omega^{2N} + a_{N-1} \omega^{2(N-1)} + \dots + a_1 \omega^2 + a_0 = 0$$

Ela fornecerá n soluções:

$$\omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \dots \quad \omega_n^2$$

E substituindo cada uma delas na equação matricial poderão se obter as formas modais:

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{Bmatrix} \quad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{Bmatrix} \quad \dots \quad \{\phi_n\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{Bmatrix}$$

Df. Matriz Modal

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

Df. Matriz Espectral

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Resulta fácil de demonstrar que dadas 2 formas modais com frequências diferentes:

$$\{\phi_m\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1m} \\ \phi_{2m} \\ \vdots \\ \phi_{nm} \end{Bmatrix} \quad \{\phi_p\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1p} \\ \phi_{2p} \\ \vdots \\ \phi_{np} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \omega_p \neq \omega_m \\ p \neq m \end{matrix}$$

cumpre-se:

$$\{\phi_m\}^T [K] \{\phi_p\} = 0 \quad \{\phi_m\}^T [M] \{\phi_p\} = 0$$

Que são as condições de ortogonalidade respeito a K e a M

definindo

$$\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\} = M_j \quad \{\phi_j\}^T [K] \{\phi_j\} = K_j$$

M_j e K_j números reais.

Da condição de ortogonalidade:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & M_j & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_n \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & K_j & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n \end{bmatrix}$$

Isto é suficiente para dizer que podemos mediante a “transformação modal” “diagonalizar” a equação de um sistema não amortecido (com ou sem excitação)..

Para poder fazer a separação da equação geral do movimento mediante a transformação:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{Bmatrix}$$

Teria que se cumprir:

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & C_j & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

Isso se cumprirá somente se C for combinação lineal de M e K.

$$[C] = a_1[M] + a_2[K]$$

Em geral esta condição não se cumpre!

Assume-se como hipótese, e se diz que se supõe que o amortecimento não é somente viscoso, mas também que cumpre a “Hipótese de Rayleigh”.

Para estruturas habituais, esta suposição permite atingir resultados aceitáveis. Para estruturas que possuem mecanismos de dissipação de energia localizados ou não uniformemente distribuídos de acordo à massa e (ou) à rigidez a Hipótese pode estar longe de ser aceitável. Nesses casos, assumir como nulos os elementos que ficam fora da diagonal da transformada da matriz de amortecimento leva a resultados errôneos.

Um caso no qual a estrutura se afasta da “condição de Rayleigh” é nos modelos nos quais se incorpora o solo. Os elementos que são de material “solo” incorporados à estrutura levam a matrizes de amortecimento modal com muitos elementos não nulos fora da diagonal principal. Outro caso é quando se realiza “controle estrutural” mediante dissipadores localizados (seja na base ou na superestrutura). Esses e outros casos fogem do escopo da análise modal como está sendo formulada, e devem se estudar por meio de “modos de vibração complexos” (que permite estender um pouco mais o alcance da análise linear), ou optar por trabalhar com metodologias de integração numérica da equação do movimento.

Para os casos nos quais se cumprem as hipóteses de regularidade do amortecimento teremos conseguido separar as equações do movimento:

$$M_j \ddot{z}_j + C_j \dot{z}_j + K_j z_j = \sum_{i=1}^n F_i \phi_{ij} \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

Vemos que todo resulta consistente já que se os ω_j cumprem:

$$[K]\{\phi_j\} = \omega_j^2 [M]\{\phi_j\}$$

Resultará que:

$$\underbrace{\{\phi_j\}^T [K] \{\phi_j\}}_{K_j} = \omega_j^2 \underbrace{\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\}}_{M_j} \rightarrow \omega_j^2 = \frac{K_j}{M_j}$$

Com o qual a significação do ω_j é a de “frequência angular própria do modo j.”

Daí que será consistente definir a “taxa do amortecimento modal do modo j”:

$$\zeta_j = \frac{C_j}{2M_j\omega_j}$$

Os vetores modais $\{\phi_j\}$ constituem uma base do espaço dos vetores de dimensão n, por isso se pode afirmar que qualquer vetor desse espaço poderá se escrever de maneira única como combinação deles. Em particular a perturbação $\{F(t)\}$:

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} = \alpha_1(t) \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{Bmatrix} + \alpha_2(t) \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{Bmatrix} + \dots + \alpha_n(t) \begin{Bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \begin{Bmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \\ \vdots \\ \phi_{nj} \end{Bmatrix}$$

Devido à ortogonalidade dos modos de vibração:

$$\{\phi_j\}^T \{F(t)\} = \alpha_j(t) \{\phi_j\}^T \{\phi_j\} \rightarrow \alpha_j(t) = \frac{\{\phi_j\}^T \{F(t)\}}{\{\phi_j\}^T \{\phi_j\}} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \phi_{ij}}{\sum_{i=1}^n \phi_{ij}^2}$$

Se os modos estivessem “normalizados” de maneira que:

$$\{\bar{\phi}_j\}^T \{\bar{\phi}_j\} = \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_{ij}^2 = 1$$

Resultaria que as “forças modais” coincidiriam com as coordenadas da força na base conformada pelos vetores modais.

Analisemos a resposta de uma perturbação harmônica senoidal generalizada:

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \cos \omega t$$

Aplicando a transformada modal:

$$M_j \ddot{z}_j + C_j \dot{z}_j + K_j z_j = \left(\sum_{i=1}^n F_i \phi_{ij} \right) \cos \omega t \quad j=1,2,3 \dots$$

Sendo que para cada j a equação anterior é de um grau de liberdade “z_j”, para cada modo teremos que a resposta estacionária será:

$$z_j(t) \sim \frac{\left(\sum_{i=1}^n F_i \phi_{ij} \right) (\cos \omega t - \varphi_i)}{M_j \omega_j^2 \sqrt{(1-r_j^2)^2 + (2\zeta_j r_j)^2}}$$

Onde:

$$r = \frac{\omega}{\omega_j} \quad , \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta_j r_j}{1-r_j^2} \right)$$

Substituindo, resultará que a história estacionária em coordenadas geométricas será:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \sim \sum_{j=1}^n \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^n F_i \phi_{ij} \right) \cos(\omega t - \varphi_i)}{M_j \omega_j^2 \sqrt{(1-r_j^2)^2 + (2\zeta_j r_j)^2}} \right] \begin{Bmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \\ \vdots \\ \phi_{nj} \end{Bmatrix}$$

Existem 2 motivos pelos quais podemos afirmar que a resposta transiente carece de importância:

- A) Para as taxas comuns de amortecimento nas estruturas civis o termo transiente apaga rapidamente.
- B) A definição matemática da excitação assume que a mesma surge de maneira repentina com a frequência ω , quando na maioria dos fenômenos reais se trata de um processo que leva vários ciclos até atingir essa frequência, com o qual a parte transiente da formula da resposta não estaria dando cobertura do que realmente acontece nesses primeiros ciclos na estrutura real.

O único caso no qual a resposta transiente é a determinante, é quando um fenômeno impulsivo é representado como uma série de Fourier, ou seja, como combinação de harmônicos. Nesses casos são justamente das respostas transientes que será composta a parte principal da resposta.

Interpretação energética das formas modais

Dada uma historia de deslocamentos qualquer $x(t)$, a expressão da Energia Cinética será da estrutura:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n)^2 = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [M] \{\dot{x}\}$$

A energia potencial elástica será

$$E_p = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\}$$

Se a partir de uma forma modal $\{\phi\}$ com frequência própria ω gerarmos uma historia que cumpra:

$$\{x\} = \{\phi\} \cos \omega t$$

Teríamos a oscilação harmônica do sistema em uma forma modal que é uma forma de oscilação livre do sistema.

A “história” das Energias cinética e potenciais serão:

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \{\phi\}^T [M] \{\phi\} \sin^2 \omega t \qquad E_p = \frac{1}{2} \{\phi\}^T [K] \{\phi\} \cos^2 \omega t$$

Supondo que o sistema não está amortecido, resultará que o sistema será conservativo com o qual a energia cinética máxima será igual à energia potencial máxima e daí resultará que para uma forma modal $\{\phi\}$ cuja frequência modal seja ω se cumprirá que:

$$\omega^2 \{\phi\}^T [M] \{\phi\} = \{\phi\}^T [K] \{\phi\}$$

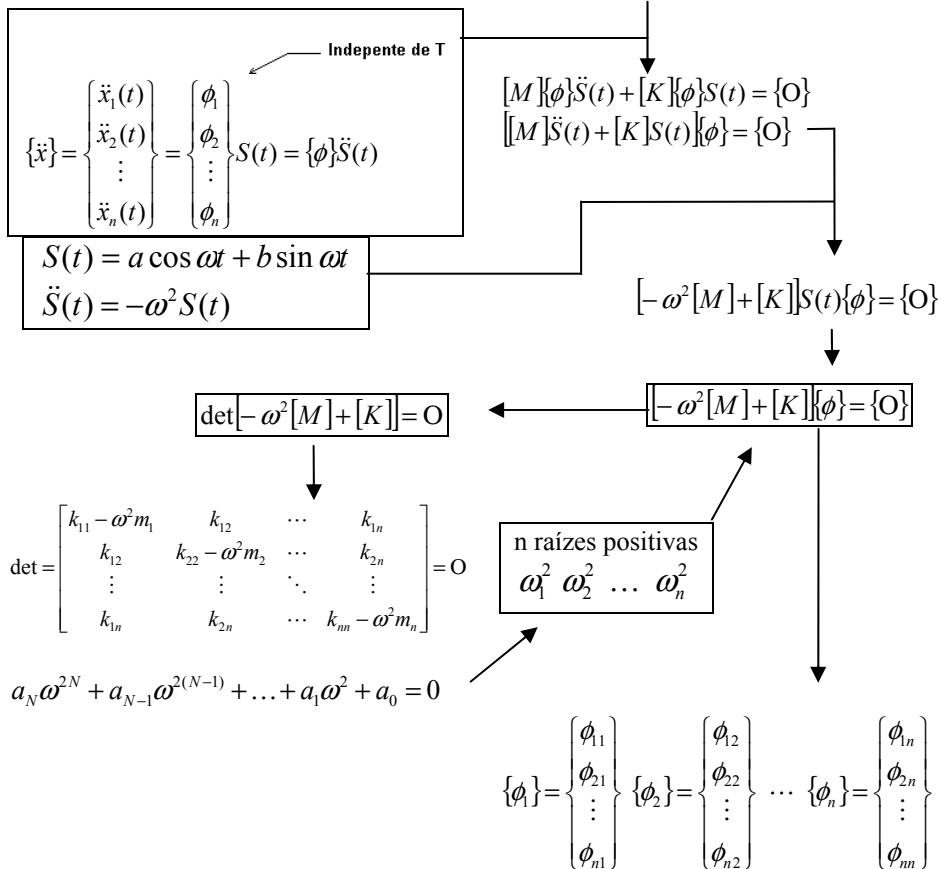
Comentário: A esta igualdade podemos chegar diretamente a partir da condição que define a forma modal:

$$[K] \{\phi\} = \omega^2 [M] \{\phi\}$$

Metodologia geral de obtenção das frequências e formas modais

Sistema livre sem amortecimento:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{O\}$$



3.7 Metodologias de cálculo Aproximado

3.7.1 Método de Rayleigh

Para uma certa estrutura, dado um certo vetor deslocamento generalizado $\{x\}$, se define o “Quociente de Rayleigh” como:

$$R(\{x\}) = \frac{\{x\}^T [K] \{x\}}{\{x\}^T [M] \{x\}}$$

Pode ser demonstrado que sempre:

$$(\omega_l)^2 \leq R(\{x\}) \leq (\omega_n)^2$$

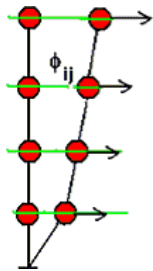
Se $\{x\}$ for “parecido” a uma forma modal $R(\{x\})$ resultará uma aproximação do quadrado da frequência angular própria associada ao modo em questão. No caso que a gente esteja aproximando ao primeiro modo saberemos que a aproximação da frequência será sempre por excesso.

Ou seja,

Se conheço uma forma modal posso saber qual é a sua frequência

$$\phi_j^T [K] \phi_j = K_j \quad \phi_j^T [M] \phi_j = M_j \quad \omega_j^2 = \frac{K_j}{M_j}$$

Posso calcular a partir da matriz K ou diretamente calculando a energia elástica do modo.



$$F_j = [K] \phi_j$$

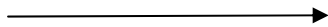
$$F_j = \phi_j^T [K] \phi_j = \sum_i \phi_{ij} F_{ij} =$$

Duas vezes a energia elástica da estrutura quando está na deformação modal (na deformação máxima)

Duas vezes a energia “Entregue pela força” para atingir a posição modal

Se tivermos “alguma deformação” parecida com uma forma modal, poderíamos achar uma aproximação da frequência da forma:

$$\tilde{\phi}_j$$



$$\tilde{\omega}_t^2 = \frac{\tilde{\phi}_j^T [K] \tilde{\phi}_j}{\tilde{\phi}_j^T [M] \tilde{\phi}_j}$$

3.7.2 Método de Dunkerley

É um método para achar aproximadamente e de maneira simples a frequência natural (frequência do 1º modo) de uma estrutura de vários graus de liberdade.

Seja a matriz de flexibilidade de um sistema:

$$[a] = [K]^{-1}$$

Os elementos da diagonal principal da matriz de flexibilidade são:

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

Estes valores representam o deslocamento generalizado para cada grau de liberdade quando se aplica uma força generalizada unitária na direção da coordenada desse grau de liberdade.

A fórmula de Dunkerley (na sua expressão mais habitual) enuncia que:

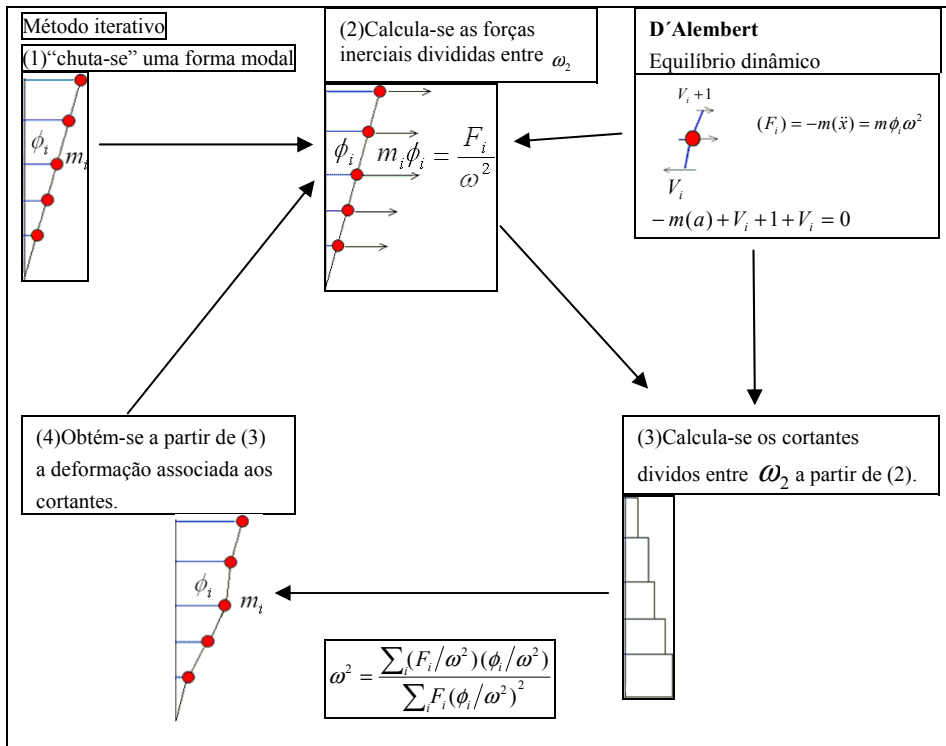
$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2} = a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \dots + a_{nn}m_n$$

As frequências dos modos superiores ($\omega_2, \omega_3, \dots$) das estruturas habituais resultam bem maiores que a frequência do primeiro modo (ω_1) com o qual será uma aproximação razoável:

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \dots + a_{nn}m_n$$

Por outra parte, se conhecermos “exatamente” a frequência do 1º modo, a fórmula de Dunkerley serve para poder aproximar a frequência do 2º modo. Se conhecermos p frequências modais primária, a formula de Dunkerley permitira atingir uma aproximação da frequência seguinte.

3.7.3 Método de Newmark – Stodola – Vianello



3.7.4 Fórmulas aproximadas usuais que se derivam do método de Rayleigh

3.7.4.1 Expressão habitual da fórmula de cálculo aproximado da frequência natural de uma estrutura em balanço

O método de Rayleigh (vide 2.7.1) se baseia em assumir uma “forma aproximada” para um certo modo (modo j) e a partir dela achar a frequência fundamental considerando que “se a forma assumida for suficientemente parecida à forma modal j verdadeira” a fórmula que daria a frequência modal angular do modo j também resultará aproximada:

$$\tilde{\omega}_j^2 = \frac{\tilde{\phi}_j^T [K] \tilde{\phi}_j}{\tilde{\phi}_j^T [M] \tilde{\phi}_j}$$

Em geral veremos que a utilidade essencial da aplicação do método de Rayleigh se centra em achar a frequência natural do modo fundamental (1°) e não de qualquer modo j .

Aos efeitos de simplificar a notação chamemos aos deslocamentos da aproximação adotada para o modo fundamental δ_1 .

Em principio a aproximação da forma modal dada pelos deslocamentos $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ adotada poderia ser qualquer deformada da estrutura que resulte compatível com os vínculos. Como temos visto se a forma modal aproximada é a deformada resultante da aplicação de um sistema de forças $F_1, F_2, \dots, F_n$, da definição mesma da matriz de rigidez K resulta:

$$\begin{matrix} F_1 & \delta_1 \\ F_2 & \delta_2 \\ \vdots & \vdots \\ F_n & \delta_n \end{matrix} = K$$

Com o qual a expressão da frequência angular aproximada adquire uma forma bastante simplificada:

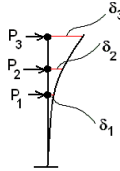
$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \delta_i}{\sum_{i=1}^n m_i \delta_i^2}$$

A escolha das forças pode ser qualquer sistema $F_1, \dots, F_n$.

Como resulta razoável se em lugar de adotar um certo sistema de forças adotamos um sistema proporcional ($F_i = h F_i$) ao mesmo o resultado da frequência não mudará já que numerador e denominador ficariam multiplicados pelo mesmo numero (quadrado de h).

Em particular poderão se adotar as forças proporcionais às massas. Em particular o coeficiente de proporcionalidade poderá ser tal que o módulo de F_i seja calibrado em “mi g”, ou seja o “peso associado à massa associada a coordenada i” mas aplicada na direção da coordenada i. (não necessariamente na vertical). Sendo assim, para essa escolha das forças F_i poderemos escrever $F_i = P_i = m_i g$. Com o qual:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{g} \delta_i^2} = g \frac{\sum_{i=1}^n P_i \delta_i}{\sum_{i=1}^n P_i \delta_i^2}$$



Em geral a deformada que resulta da aplicação dos pesos resulta uma boa aproximação do 1º modo, com o qual a fórmula anterior fornece um caminho simples de achar uma aproximação da frequência angular do 1º modo. Essa aproximação como qualquer aproximação da frequência obtida a partir de formulas que derivam do método de Rayleigh será sempre por excesso.

A expressão da aproximação da frequência fundamental (em Hz) resulta:

$$f \geq \frac{1}{2\pi} \sqrt{g \frac{\sum_{i=1}^n P_i \delta_i}{\sum_{i=1}^n P_i \delta_i^2}}$$

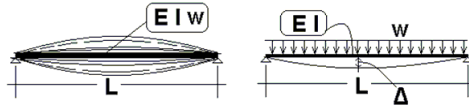
A expressão da aproximação do período fundamental em segundos resulta:

$$T \leq 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n P_i \delta_i^2}{g \sum_{i=1}^n P_i \delta_i}}$$

Estas expressões estão sempre presentes nas normas de vento e de sísmica para o calculo da frequência e o período fundamental de estruturas em balanço. A praticidade das mesmas está em ponderar os parâmetros dinâmicos da estrutura em questão mediante cálculos estáticos aos quais os engenheiros estão habituados.

3.7.4.2 Fórmula de cálculo aproximado da frequência natural de uma viga simplesmente apoiada

Calcula-se a deflexão máxima Δ da viga submetida ao peso associado à massa distribuída. A aproximação da frequência natural (fundamental) será f_n :



$$f_n = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{gEI}{wL^4}} \cong \frac{18}{\sqrt{1000\Delta}} = \frac{18}{\sqrt{\Delta^*}} \quad \begin{matrix} [f_n] = \text{Hz} \\ [\Delta^*] = \text{mm} \end{matrix}$$

Observe-se que resulta que a frequência natural será função exclusivamente da deflexão máxima.

Por exemplo:

$$\text{Se : } \begin{cases} \Delta^* = 3,2 \text{ mm} \implies f_n = 10 \text{ Hz} \\ \Delta^* = 4,0 \text{ mm} \implies f_n = 9 \text{ Hz} \\ \Delta^* = 6,6 \text{ mm} \implies f_n = 7 \text{ Hz} \\ \Delta^* = 9,0 \text{ mm} \implies f_n = 6 \text{ Hz} \end{cases}$$

4 Efeitos dinâmicos gerados por equipamentos mecânicos

4.1 Introdução à problemática dos projetos de estruturas que sustentam máquinas.

Para toda estrutura existe um “parceiro” do qual jamais conhecemos o suficiente e cuja influência pode ser crítica no desempenho da mesma. O solo, a fundação da estrutura por cima e em interação com o solo sempre vira um fator crítico mesmo se for o caso de estruturas submetidas a cargas estáticas. A interação com o solo para estruturas analisadas estaticamente é um tema muito discutido, mas com uma solução mais ou menos aceita que resulta da suposição elástica da resposta do mesmo e a substituição das restrições do solo sobre a estrutura por molas. Mesmo que a resposta estática do solo esteja ligada ao tamanho das fundações, mesmo que ninguém duvida que dentro do solo exista interação entre as fundações: a representação do solo como molas nos nossos modelos resulta uma boa opção, e melhor ainda se for o caso que “alguém” forneça para nós valores de coeficientes de mola que sejam confiáveis. Nos problemas estáticos poderíamos também ante a dúvida, testar uma faixa larga de coeficientes de mola e saber se a solução do nosso modelo é estável.

A interação dinâmica solo-estrutura é um tema muito mais complexo já que na interfase fundação-solo existe uma “via de escape de energia”. Mediante ondas de propagação, o solo se comporta como o conduto pelo qual uma quantidade nada depreciável de energia “vai embora” amortecendo os efeitos dinâmicos da estrutura que sustenta. Mas também existe a possibilidade que as condições do solo sejam susceptíveis de “ressonar” devido à excitação, ou também pode que o solo esteja “sintonizado” com a estrutura e resulte em um fator de amplificação de efeitos impulsivos. Se isso não for pouco, podemos ter a certeza que as propriedades de amortecimento do solo são bem diferentes que as da estrutura, o que invalida a suposição de amortecimento de Rayleigh (na qual se sustenta a análise modal clássica linear.

Com isso vemos que para efeitos dinâmicos não resulta suficiente substituir a presença do solo por “molas confiáveis”.

A pergunta “científica” deveria ser proposta em termos de “como abordar o problema da maneira mais realista”. Possivelmente o modelo deveria ser tal que leve em conta uma “resposta do solo dependente da frequência”!!!.

A pergunta do engenheiro será “como contornar o problema e ainda obter uma solução confiável”.

Quando as cargas transmitidas ao solo são originadas em excitações dinâmicas os critérios devem se adequar às características da excitação e da maquinaria. Para maquinaria de massa maior e com desbalanceamentos significativos a resposta do solo pode ser tal que afetem seriamente o funcionamento das mesmas.

O projeto da estrutura de sustentação de máquinas deve estar sempre orientado a fazer que a frequência fundamental da mesma esteja o mais afastada possível da frequência operacional da máquina.

4.2 Classificação dos tipos de máquina

De acordo à periodicidade das excitações:

- Máquinas que geram excitações cíclicas
- Máquinas que geram excitações que não são cíclicas
- Para os casos de máquinas que geram excitações cíclicas:
- Máquinas de Baixa Frequência (motores diesel, bombas,...).
- Máquinas de Média Frequência (motores diesel intermediários,...)
- Máquinas de Alta Frequência (turbo-geradores, turbinas de vapor,...).

Outra classificação de interesse será de acordo ao mecanismo que gera a excitação:

- Máquinas Rotativas.
- Máquinas com partes que oscilam.
- Máquinas com partes que geram impacto.

4.3 Classificação dos tipos de bases executadas em concreto armado

A) Blocos maciços de concreto:

Caracterizam-se por admitir basicamente seis modos de vibração:

- deslocamento na direção horizontal x.
- deslocamento na direção horizontal y.
- deslocamento na direção vertical z.
- giro com eixo na direção horizontal x.

- giro com eixo na direção horizontal y.
- giro com eixo na direção vertical z.

São adotados para casos de maquinarias de baixa e média frequência.

Dependendo do tipo de solo se terá ou não sintonização com as frequências da excitação. A presença da massa própria procura incrementar a inércia global do sistema. Para solos moles a grande massa resulta em frequências naturais baixas que propiciam deslocamentos indesejáveis. Em geral para solos moles e frequências medias será impossível afastar a frequência do sistema da faixa de frequência da excitação. A incorporação de estacas pode controlar a frequência da vibração vertical e o deslocamento, mas na horizontal resulta difícil garantir o bom desempenho sem executar estacas inclinadas.

B) Lajes de Fundação:

Se a laje de fundação for suficientemente grande, centrada e relativamente rígida permite controlar todos os deslocamentos menos o vertical que vira a única coordenada relevante.

O campo de aplicação é similar ao da fundação por Bloco.

C) Pórticos:

Apresentam uma excelente combinação das vantagens estruturais e funcionais para máquinas de alta frequência para as quais se deve também propiciar o acesso de conexões por baixo das mesmas.

Na medida em que se atinjam frequências naturais baixas se garante um afastamento das frequências operacionais o que significa baixas respostas. Deve ser ressaltado que no caso de excitações verticais a resposta poderá continuar sintonizada dependendo do tipo de solo.

Como já foi mencionado o campo de aplicação será o das máquinas de alta frequência como é o caso das turbo-máquinas.

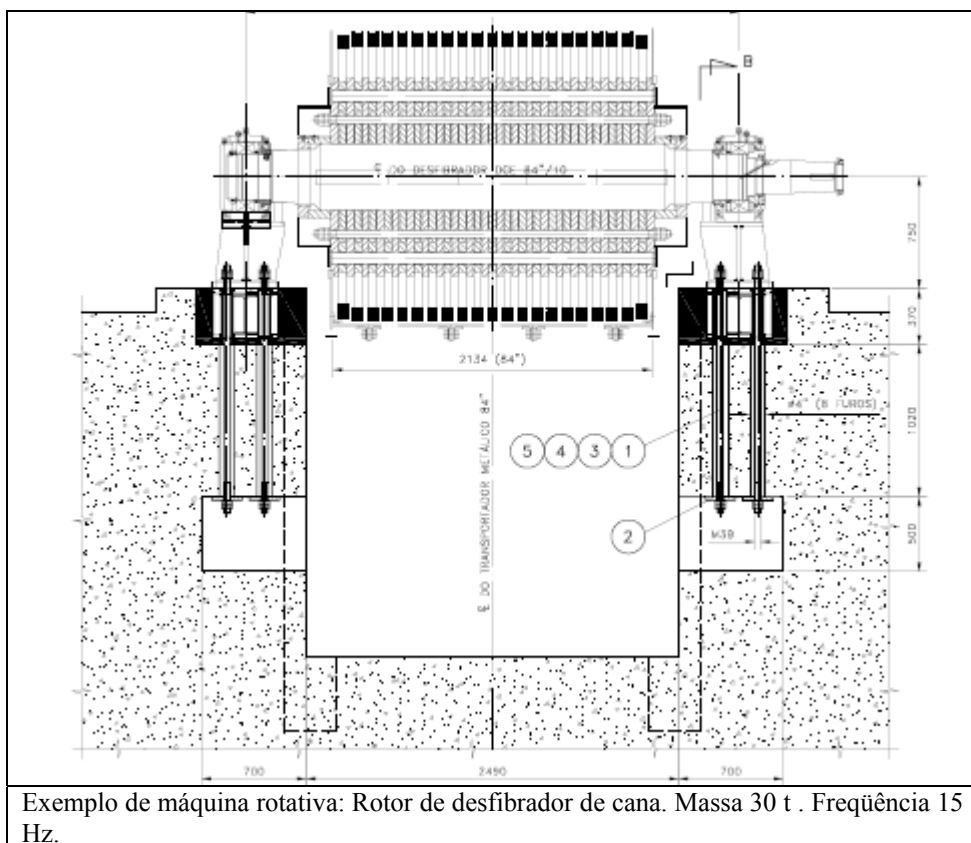
4.4 Análise de Estruturas que sustentam Máquinas Rotativas

4.4.1 Características da excitação

Exemplos de este tipo de máquinas são: Turbinas, Geradores, Motores Elétricos, Redutores, Enroladeiras, Picadores, Bombas Centrífugas, Ventiladores, Redutores, etc.

O denominador comum delas é a presença de um elemento em comum: o “rotor” que gira em torno a um eixo.

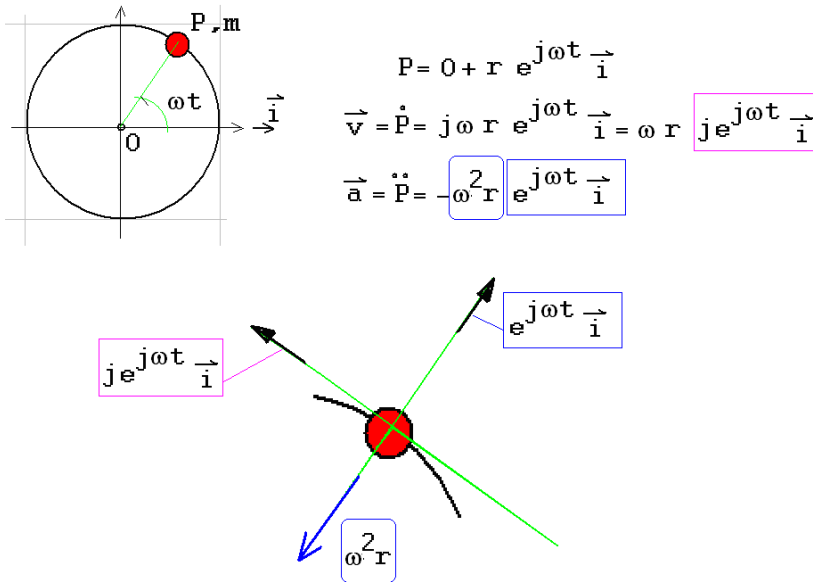
As excitações são geralmente resultados do fato que o centro de massa do rotor é excêntrico ao eixo de rotação. Ou seja, que por alguma razão o centro de massa do rotor não fica exatamente no eixo. Ele está girando arredor do eixo, ou seja que o rotor está “desbalanceado”. Sempre existe um certo “desbalanceamento” e ele cresce com a idade do equipamento, geralmente devido ao desgaste. Pode também se dar abruptamente quando uma peça quebra e se desprende do rotor (hélice de uma turbina ou ventilador ou uma faca de um picador).



4.4.2 Efeito de rotor desbalanceado

Uma massa m obrigada a seguir uma trajetória circular de raio r com velocidade angular uniforme ω estará submetida a uma aceleração $-\omega^2 \cdot r$ radial.

Um rotor desbalanceado tem o centro de massa excêntrico ao eixo de rotação, e isso equivale a dizer que o centro de massa do rotor está sendo obrigado a seguir uma trajetória circular de raio “a excentricidade”, e com centro na projeção normal do centro de massa sobre o rotor.



A ação do eixo (devido à excentricidade do rotor) sobre o rotor será $F = -m(\omega^2) \cdot r$ (radial para dentro), e a reação sobre o eixo será $F = m(\omega^2) \cdot r$ (para fora). Esta força radial “para fora” é a que será transmitida à estrutura, e resultará em uma excitação normal ao eixo que se pode decompor em 2 excitações respeito a 2 direções ortogonais no plano normal ao eixo. Essas excitações terão frequência angular ω , e a fase entre elas será de um quarto de ciclo.

Observe-se que os efeitos de desbalanceamento se reconhecem devido a que as amplitudes vão crescendo com o quadrado da velocidade de rotação

Os dados necessários para definir as funções mecânicas do rotor desbalanceado deveriam ser apresentados pelo fornecedor do equipamento. Às vezes, os fornecedores subministram os dados de maneira explícita como uma certa força (correspondente à frequência de operacional do rotor). Outras vezes dão também componentes para harmônicos superiores (coeficientes de Fourier da função mecânica), na medida em que existam efeitos impulsivos relevantes.

Em muitos casos o fornecedor pode nem saber esses dados e será necessário estimar a excentricidade do rotor. Nesse caso será necessário saber pelo menos qual é a massa do rotor. A excentricidade pode ser estimada de acordo aos valores da tabela da ISO 1940, adjuntos no parágrafo seguinte.

O fornecedor deverá subministrar também as solicitações relacionadas a cargas associadas a eventos singulares. Um deles é o de “breakdown” que resulta no incremento excepcional das forças cíclicas transmitidas aos mancais. Se esse dado não estiver na documentação, podem se adotar os valores incluídos na norma DIN 4024. De acordo às mesmas será assumida uma força “quase-estática” equivalente a 15 vezes a força de desbalanceamento para a 1ª velocidade crítica do elemento crítico relevante (por exemplo, da hélice de uma turbina). Quando os dados não estiverem explícitos será necessário aprofundar nos fatores relevantes que ocasionam estas cargas excepcionais.

Efeitos de curto-circuito de motores (geradores resultam) em pares de forças. Elas provocam forças com componente vertical e horizontal nos planos normais aos eixos dos rotores. Trata-se de forças impulsivas, que são majorados (de acordo á critérios do fabricante) e considerados na análise como forças quase-estáticas.

A verificação em serviço do equipamento é geralmente nos mancais de acordo a limitação de deslocamentos (velocidades ou acelerações). Resulta conveniente receber quais são esses limites do mesmo fornecedor do equipamento. Nos casos nos quais esses dados não estão a nossa disposição teremos que estimar o desempenho da base de acordo a parâmetros determinados na bibliografia técnica (vide Anexo B). Resulta sempre conveniente notificar as partes interessadas sobre o fato que (em ausência de dados do fornecedor) se está realizando a avaliação de acordo a parâmetros referenciais que não foram especificados pelo fabricante.

Nos modelos estruturais, a massa da maquinaria será representada como concentrada no centro de gravidade da mesma e vinculada de maneira infinitamente rígida à estrutura. Deve ser ressaltado que se a estrutura própria da maquinaria tiver flexibilidade relevante, o esquema estrutural da máquina deve ser incorporado no modelo da estrutura que sustenta o equipamento já que a interação entre elas afetará de a resposta. Casos típicos nos quais será necessário levar em conta esses efeitos são nas maquinarias de fabricas de papel e de tecidos.

As “enroladeiras” apresentam uma dificuldade suplementar devido a que a massa real do rotor se compõe do cilindro que enrola (o rotor mesmo), e da massa do filme enrolado já que todo gira junto. O filme (papel, tecido, etc.) é muitas vezes mais de 90% da massa quando o tubo está completamente enrolado. Com isso temos que a massa do rotor vai crescendo à medida que enrola, e a excentricidade resultante depende da tensão à qual o filme é enrolado e de características específicas e não uniformes do material. Estimar a excentricidade assertivamente resulta quase impossível, como também resulta impossível extrapolar comportamentos com materiais diferentes. São os casos mais “ferozmente instáveis” já que as frequências estão muitas vezes “sintonizadas” com as frequências naturais da estrutura que as sustenta e os resultados são fáceis de apreciar nas fábricas de papel.

4.4.3 Valores da Força devida à Excentricidade de Rotores de acordo a ISO 1940

Estes valores são usados para definir a força harmônica (1º harmônico da excitação) aos efeitos do dimensionamento das estruturas que sustentam as máquinas rotativas:

$$F_u = m_r \left(\frac{Q}{\omega_{op}} \right) \cdot \frac{S \cdot \omega^2}{1000} \quad [N]$$

F_u = amplitude da força em Newton.

Q = valor estipulado na 2ª coluna da tabela [mm/s] em função do tipo de rotor.

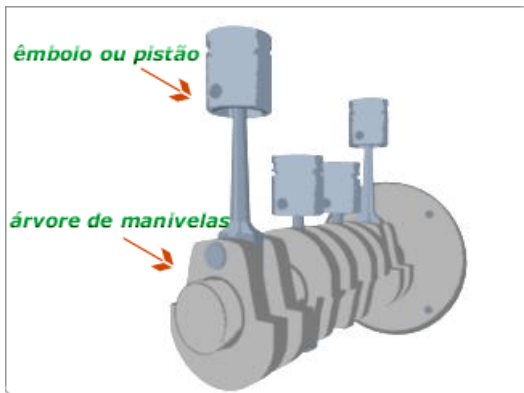
$S=2.5$ (vezes). Coeficiente de amplificação normalizada.

ω_{op} = frequência angular operacional do giro do rotor.

ω = frequência angular do rotor para a qual se realiza o cálculo da força.

	Excentricidade X Freq. Ang =		Tipos de Rotores
	QUALIDADE	Q (mm / s)	
	G1600	1600	<u>Árvore de manivelas</u> de motores grandes de 2 tempos rigidamente montados
	G630	630	<u>Árvore de manivelas</u> de motores grandes de 4 tempos rigidamente montados
	G250	250	<u>Árvore de manivelas</u> de motores diesel rápidos de 4 tempos rigidamente montados
	G100	100	<u>Árvore de manivelas</u> de motores diesel rápidos com mais de 6 cilindros
	G40	40	<u>Árvore de manivelas</u> de motores rápidos com mais de 4 tempos com 6 ou mais cilindros com montagem flexível
	G16	16	<u>Árvore de manivelas</u> de motores com 6 ou mais cilindros com requisitos especiais
			<u>Eixo de propulsão</u> com requisitos especiais
			<u>Eixo de cardan</u> com requisitos especiais
			Partes de Máquinas de <u>Moagem</u>
			Partes de Máquinas <u>Agrícolas</u>
	G6.3	6,3	<u>Componentes individuais de motores com requisitos especiais</u>
			Partes de <u>máquinas industriais</u>
			<u>Tambores centrífugos</u>
			<u>Ventiladores</u>
			Rotores de <u>Bombas</u>
			Partes de <u>maquinarias em geral</u>
	G2.5	2,5	<u>Turbinas</u>
			Rotor de <u>turbo gerador</u>
			<u>Rotores em geral</u>
			<u>Turbo compressor</u>
			<u>Turbo bombas</u>

Observação :



Árvore de manivelas = virabrequim = girabrequim = crankshaft

4.4.4 Caracterização de projeto estrutural de bases para máquinas rotativas de baixa e média frequência

- 1) Fundação em Bloco Rígido sobre estacas ou lajes de fundação (não existe uma possibilidade de evitar eficientemente a sincronização).
- 2) Bases em Bloco Rígido de máquinas rotativas :
 - A) Altura > 0,2 x Largura, Altura > 0,1 x Comprimento
 - B) Largura > 1 a 1,5 x (altura do centro de gravidade da máquina respeito à base da fundação)
 - C) Massa do bloco > 1,5 a 2,5 x (Massa da Máquina)
 - D) As estacas são projetadas de maneira que não estejam carregadas além da METADE da carga admissível.
 - E) O centro elástico das estacas deve ficar na mesma vertical que o centro de gravidade (Máquinas+Fundação)
 - F) Usar estacas inclinadas para rigidizar.

Observação: Vide interação solo-estrutura de acordo a 4.6, 4.7.

4.4.5 Características do roteiro de projeto estrutural de Bases para máquinas rotativas de alta frequência

(caso das turbo-máquinas).

*Adaptação de “Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines”- Suresh Ária, Michael O’Neil, George Pinkus .

a. Caracterização da estrutura sustentadora típica:

Estruturas de pórticos de concreto armado ou “laje com buracos”:

- Muitas vezes resulta importante levar em conta a interação solo estrutura.
- Sub-sincronizadas ($f_{h1} < f_{op}$) nas direções Horizontais.
- Dependendo do solo poderá ser Sobre-sincronizadas ($f_{v1} > f_{op}$) na Vertical. , depende do tipo de solo e também do modelo que o engenheiro adota.

b. Etapas preliminares.

b1. Definição de Cargas (resulta importante fazer esta análise preliminar para poder pré-dimensionar adequadamente):

- 1) Peso Próprio
- 2) Peso da Máquina incluindo as partes rotativas.
- 3) Peso de equipamentos auxiliares.
- 4) Torque operacional de cada um dos componentes. (é um momento arredor do eixo de acordo ao sentido de rotação do rotor, e não introduz cortantes globais na estrutura).
- 5) Momentos de Curto-Circuito – de natureza impulsiva. Devem ser tomados no sentido positivo e negativo em respeito à rotação operacional.
- 6) Efeitos radiais de desbalanceamento de rotores.
- 7) Forças de empuxo de vácuo na turbina (o condensador puxa para abaixo a turbina).
- 8) Forças de empuxo de vácuo no condensador (empurra o gerador para cima).

c. Pré-dimensionado. (recomendações para pré-dimensionado)

Pilares:

- Tensões quase iguais para carga vertical estática.
- Devem poder sustentar 6 vezes a carga vertical estática.
- Espaçamento entre pilares no possível não maior que 3.6 m. (Isso diz o livro, mas na realidade em turbo-geradores grandes se chega a vãos de 7 ou mais metros).

Vigas e Laje Superior.

- $L/h < 5$.
- Deslocamento devido à carga estática vertical menor 0,005 cm (50 μ m).
- Vãos menores que a alturas dos pilares.

- Rigidez 2 vezes a das colunas.

Massa :

- Massa da estrutura (incluindo a base) deve ser maior que 3 vezes à da maquinaria. (Para máquinas alternativas mais de 5 vezes)
- Massa da laje e vigas não menor que a do equipamento.

Carga estática:

- As solicitações no solo (ou estacas) para cargas estáticas não devem ultrapassar a metade dos valores admissíveis.
- A excentricidade da carga vertical estática (incluindo o peso próprio) respeito ao centro de gravidade da base (centro elástico) não deve ultrapassar os 30 cm.
- O peso do equipamento + a laje que o sustenta deve estar centrado respeito aos pilares que os sustentam (centro elástico)
- Sendo P_{eq} o peso do equipamento, se geram três estados de carga:
 - carga vertical total + (0,5 P_{eq} atuando na direção vertical)
 - carga vertical total + (0,3 P_{eq} atuando na direção lateral)
 - carga vertical total + (0,1 P_{eq} atuando na direção longitudinal)

Para cada um destes estados o deslocamento deve ser menor que 0,05 cm.

-Frequência individual própria de cada pilar deve ser maior que 2 vezes a maior frequência operacional do equipamento. (Evitar ressonância em modos superiores que não estarão cobertos pela análise dinâmica e que resultam em emissões acústicas induzidas pela estrutura. Em geral não acontece em bases de concreto e resulta muito comum em pilares metálicos)

d. Análise Dinâmica:

O amortecimento a ser adotado será na faixa de $\xi_{min} = 0.01$, $\xi_{max} = 0.025$

Em turbo-máquinas a frequência mais alta de excitação corresponde ao do eixo (eixos) da (das) turbina (s). Resulta importante que a quantidade de modos incorporados à análise atinja (pelo menos) até uma frequência 10% maior que a frequência operacional de qualquer turbina, para assim assegurar que foram levados em conta todos os modos susceptíveis de entrar em ressonância. Isso implica as vezes levar em conta até mais de 200 modos. Muitas vezes deveremos reformular o nosso modelo estrutural para despojar ele de “apêndices flexíveis” que geram modos de vibração irrelevantes que obstaculizam atingir a cobertura dos modos excitáveis.

- d1. Avaliação da resposta no Estado operacional de serviço, importância funcional relacionada à avaliação do cumprimento das normas, exigências do fabricante, mitigação de problemas sensíveis respeito a seres humanos ou outras maquinarias, etc.
- d2. Avaliação no Estado operacional limite para dimensionamento das partes estruturais.
- d3. Estados transientes (assumidos como estacionário para cada frequência intermediária), ou seja, time-history de respostas estacionárias em frequências operacionais intermediárias.
- d4. Os estados excepcionais determinados pelo fabricante (ruptura de alguma peça crítica, curto-circuito, e outros) são definidos em geral na base de formulação de “estados estáticos de carga”.

e. Verificações suplementares

- e1. Para fundação superficial: a excentricidade em planta da resultante da carga total (dinâmica e estática incluindo o peso da fundação) não deverá ultrapassar $L/200$ (L =dimensão da base na direção onde está medida a excentricidade).

Reações do solo:

- Para cargas estáticas..... $\sigma_e < 0.5\sigma_{ad}$
- Para cargas dinâmicas..... $\sigma_{dyn} < 1.5\sigma_e$
- Para cargas estáticas e dinâmicas..... $\sigma_e + \sigma_{dyn} < 0.75\sigma_{ad}$

- e2. Frequência operacional fop deve cumprir

$$f_{op} > 1.2f_n \text{ fn principal relevante}$$

$$f_{op} > 0.8f_n \text{ principal relevante}$$

Em turbo-máquinas geralmente $f_{op} >> 1.2f_n$ principal relevante.

- e3. Frequência natural fundamental individual de qualquer elemento: $f_i > 2f_{op}$
ou $f_i < 0.5f_{op}$

- e4. Fadiga:

Para estruturas de concreto, se há inversão de tensão e as amplitudes são elevadas, com as tensões de pico atingindo 50% da tensão admissível, as armaduras devem ser projetadas de acordo aos parágrafos da norma relativos à fadiga.

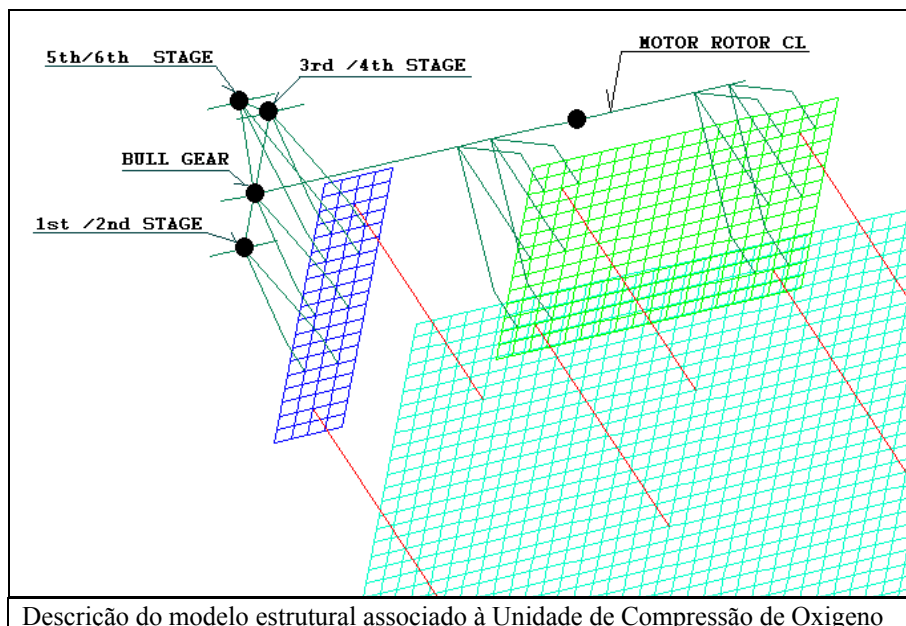
No Anexo F pode se consultar uma revisão de diretivas de verificação de fadiga de acordo à Norma ABNT NBR 6118-2003, e também algumas observações e sugestões sobre possíveis maneiras de simplificar a metodologia de verificação. Deve ser ressaltado que a exigência de uma vida útil da estrutura cuja quantidade de ciclos resulte em uma flexibilização significativa da estrutura implicaria que a resposta dinâmica da estrutura à excitação também se veria submetida a mudanças. Em geral o respeito às recomendações de pré-dimensionamento permite evitar tais situações, e justifica o fato que elas não são exageradas como parecem.

4.5 Exemplo de Análise dinâmica da estrutura que sustenta uma Unidade de Compressão de Oxigênio

Item	Rotor Mass m_r [kg]	RPM	Cycles/Sec [Hz]	Period [Sec]	Ang. Freq. $\omega_{o,op}$ [Rad/sec]	Unbalanced Force- Amplitude At Operational Speed * $F_{u,op}$ [kgf]																																																
			RPM/60	60/RPM	$RPM * 2_{\pi} / 60$	$m_r * \omega_{op} / 1600$																																																
BULL GEAR	1350	1792	30	0.03348	188	158																																																
MOTOR ROTOR	4350	1792	30	0.03348	188	511																																																
1 st / 2 nd STAGE	42	29120	485	0.00206	3048	80																																																
3 rd / 4 th STAGE	43	29120	485	0.00206	3048	82																																																
5 th / 6 th STAGE	52	23296	388	0.00258	2437	79																																																
COUPLING	300	1792	30		188	- -																																																
*$F_u = m_r \left(\frac{Q}{\omega_{op}} \right) \cdot \frac{S \cdot \omega^2}{1000} \text{ [N] } , \quad Q = 2.5mm / s , \quad S = 2.5$$F_{u,op} = m_r (Q) \frac{S_{\omega_{op}}}{1000} = m_r (2.5)(2.5) \frac{\omega_{op}}{1000} = 6.25m_r \frac{\omega_{op}}{1000} \text{ [N]}$$= 6.25m_r \frac{\omega_{op}}{10000} [kgf] = m_r \frac{\omega_{op}}{1600}$																																																						
<table><tr><th>Perturbation</th><th>RPM</th><th>Amplitude (tf)</th><th>Period [Sec]</th><th>DELAY t_0 [Sec] $t_0 = 0$ for Hor. $t_0 = 0.25T$ for Vert.</th><th>Remarks About the way the dynamic load was defined</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>T 60/RPM</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1) Motor Rotor Horiz</td><td>1792</td><td>0.511</td><td>0.03348</td><td>0</td><td>Amp=Static LC 2</td></tr><tr><td>2) Motor Rotor Vert</td><td>1792</td><td>0.511</td><td>0.03348</td><td>0.00837</td><td>Amp=Static LC 3</td></tr><tr><td>3) Bull Gear Horiz</td><td>1792</td><td>0.158</td><td>0.03348</td><td>0</td><td>Amp=Static LC 4</td></tr><tr><td>4) Bull Gear Vert</td><td>1792</td><td>0.158</td><td>0.03348</td><td>0.00837</td><td>Amp=Static LC 5</td></tr><tr><td>5) Stages Horiz</td><td>29120</td><td>0.082</td><td>0.00206</td><td>0</td><td>Amp=Static LC 6</td></tr><tr><td>6) Stages Vert</td><td>29120</td><td>0.082</td><td>0.00206</td><td>0.00052</td><td>Amp=Static LC 7</td></tr></table>							Perturbation	RPM	Amplitude (tf)	Period [Sec]	DELAY t_0 [Sec] $t_0 = 0$ for Hor. $t_0 = 0.25T$ for Vert.	Remarks About the way the dynamic load was defined				T 60/RPM			1) Motor Rotor Horiz	1792	0.511	0.03348	0	Amp=Static LC 2	2) Motor Rotor Vert	1792	0.511	0.03348	0.00837	Amp=Static LC 3	3) Bull Gear Horiz	1792	0.158	0.03348	0	Amp=Static LC 4	4) Bull Gear Vert	1792	0.158	0.03348	0.00837	Amp=Static LC 5	5) Stages Horiz	29120	0.082	0.00206	0	Amp=Static LC 6	6) Stages Vert	29120	0.082	0.00206	0.00052	Amp=Static LC 7
Perturbation	RPM	Amplitude (tf)	Period [Sec]	DELAY t_0 [Sec] $t_0 = 0$ for Hor. $t_0 = 0.25T$ for Vert.	Remarks About the way the dynamic load was defined																																																	
			T 60/RPM																																																			
1) Motor Rotor Horiz	1792	0.511	0.03348	0	Amp=Static LC 2																																																	
2) Motor Rotor Vert	1792	0.511	0.03348	0.00837	Amp=Static LC 3																																																	
3) Bull Gear Horiz	1792	0.158	0.03348	0	Amp=Static LC 4																																																	
4) Bull Gear Vert	1792	0.158	0.03348	0.00837	Amp=Static LC 5																																																	
5) Stages Horiz	29120	0.082	0.00206	0	Amp=Static LC 6																																																	
6) Stages Vert	29120	0.082	0.00206	0.00052	Amp=Static LC 7																																																	
Resumo de dados relevantes e a definição analítica das excitações associadas da Unidade de Compressão de Oxigeno																																																						

Item	Rotor Mass m_r [kg]	RPM	Cycles/Sec [Hz]	Period [Sec]	Ang. Freq. $\omega_{o,op}$ [Rad/sec]	Unbalanced Force- Amplitude At Operational Speed* $F_{u,op}$ [kgf]
			RPM/60	60/RPM	$RPM * 2_{\pi} / 60$	$m_r * \omega_{op} / 1600$
BULL GEAR	1350	1792	30	0.03348	188	158
MOTOR ROTOR	4350	1792	30	0.03348	188	511
1 st /2 nd STAGE	42	29120	485	0.00206	3048	80
3 rd /4 th STAGE	43	29120	485	0.00206	3048	82
5 th /6 th STAGE	52	23296	388	0.00258	2437	79
COUPLING	300	1792	30		188	- -
* $F_u = m_r \left(\frac{Q}{\omega_{op}} \right) \cdot \frac{S \cdot \omega^2}{1000} \text{ [N] } , \text{ } Q = 2.5mm/s \text{ , } S = 2.5$$F_{u,op} = m_r(Q) \frac{S \omega_{op}}{1000} = m_r(2.5)(2.5) \frac{\omega_{op}}{1000} = 6.25m_r \frac{\omega_{op}}{1000} \text{ [N]}$$= 6.25m_r \frac{\omega_{op}}{10000} [kgf] = m_r \frac{\omega_{op}}{1600}$						

Perturbation	RPM	Amplitu de (tf)	Period [Sec] T	DELAY t_0 [Sec] $t_0 = 0$ for Hor. $t_0 = 0.25T$ for Vert.	Remarks About the way the dynamic load was defined
			60/RPM		
1) Motor Rotor Horiz.	1792	0.511	0.03348	0	Amp=Static LC 2
2) Motor Rotor Vert.	1792	0.511	0.03348	0.00837	Amp=Static LC 3
3) Bull Gear Horiz	1792	0.158	0.03348	0	Amp=Static LC 4
4) Bull Gear Vert	1792	0.158	0.03348	0.00837	Amp=Static LC 5
5) Stages Horiz	29120	0.082	0.00206	0	Amp=Static LC 6
6) Stages Vert	29120	0.082	0.00206	0.00052	Amp=Static LC 7



Mode	T	Mode	T	Mode	T
1	0.190327	34	0.004640	68	0.002160
2	0.190285	35	0.004177	69	0.002160
3	0.157427	36	0.004060	70	0.002146
4	0.073677	37	0.004036	71	0.002124
5	0.047567	38	0.003994	72	0.002114
6	0.045991	39	0.003907	73	0.002102
7	0.039576	40	0.003742	74	0.002095
8	0.036632	41	0.003686	75	0.002072
9	0.033125	42	0.003659	76	0.002053
10	0.020986	43	0.003640	77	0.002036
11	0.017176	44	0.003512	78	0.002024
12	0.014321	45	0.003504	79	0.002022
13	0.012483	46	0.003427	80	0.001977
14	0.012298	47	0.003319	81	0.001976
15	0.011920	48	0.003263	82	0.001951
16	0.010673	49	0.003011	83	0.001906
17	0.010523	50	0.002998	84	0.001890
18	0.009337	51	0.002931	85	0.001878
19	0.008913	52	0.002924	86	0.001866
20	0.008640	53	0.002844	87	0.001846
21	0.007912	54	0.002777	88	0.001837
22	0.007424	55	0.002737	89	0.001836
23	0.007256	56	0.002722	90	0.001807
24	0.007063	57	0.002720	91	0.001776
25	0.006849	58	0.002699	92	0.001768
26	0.006522	59	0.002670	93	0.001708
27	0.006100	60	0.002526	94	0.001694
28	0.005643	61	0.002361	95	0.001683
29	0.005451	62	0.002354	96	0.001681
30	0.005325	63	0.002340	97	0.001635
31	0.004745	64	0.002332	98	0.001625
32	0.004735	65	0.002330	99	0.001584
33	0.004716	66	0.002297	100	0.001580
		67	0.002211		

Listado de modos períodos próprios de vibração da estrutura.

Observe-se que o modo 100 possui período modal:

$T_{100} = 0.00158$, ou seja, que a frequência modal do modo 100 será:

$f_{100} = 633\text{Hz} > 1.1 * 485$, ou seja 10 % maior que a máxima frequência operacional de qualquer rotor.

Com isso se garante a cobertura na análise de resposta de todos os efeitos de amplificação dinâmica.

4.6 Modelo de interação dinâmica solo-estrutura para Fundação Direta Rígida de máquinas.

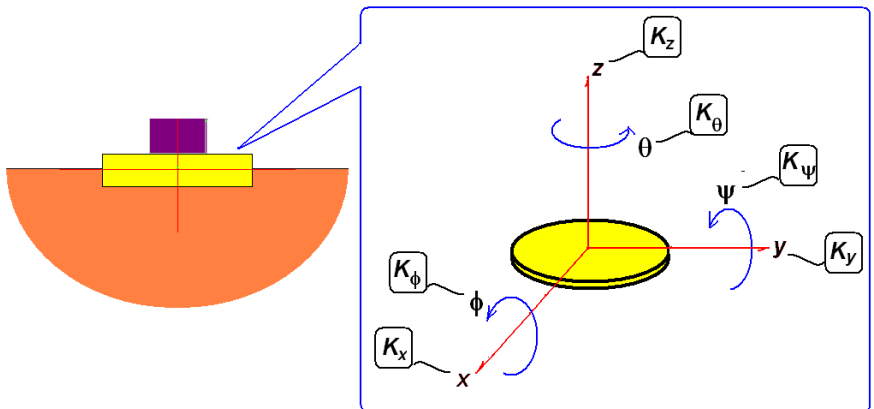
Considerando o conjunto máquinas-fundação como infinitamente rígido, a analogia mais simples seria representar o sistema solo-estrutura como um sistema “massa-mola amortecido”. Para isso deveremos definir 6 coeficientes de mola, um para cada um dos graus de liberdade: K_x , K_y , K_z , K_ϕ , K_ψ , K_θ .

K_x , K_y são os coeficientes de mola horizontais nas direções x e y respectivamente.

K_z é o coeficiente de mola vertical.

K_ϕ , K_ψ são os coeficientes de mola de balanceio ao redor dos eixos x e y respectivamente.

K_θ é o coeficiente de mola de torção respeito ao eixo vertical z.



A maior dificuldade radica em achar valores confiáveis para esses parâmetros e também para os amortecimentos.

A **massa** a ser considerada será a massa total do conjunto “máquina- fundação”.

De fato pode se intuir que uma porção do solo (em contato com a fundação) vibrará solidariamente com a mesma. Isso implicaria que essa massa adicional deveria ser considerada como parte da massa do oscilador. Assume-se na prática que essa massa do solo é suficientemente pequena para ser desconsiderada.

Os **coeficientes de mola** são determinados por meio de resultados baseados na “Teoria do Semi – Espaço elástico” considerando que a fundação se encontra a pouca profundidade respeito à superfície do solo. A profundidade começa a ser relevante quando a mesma atinge valores próximos às dimensões horizontais da fundação. Para valores maiores de profundidade os valores das frequências naturais se veriam significativamente afetados.

Nessas hipóteses, os valores dos coeficientes de mola dependerão de parâmetros geométricos da fundação e de valores que caracterizam o solo. Essas propriedades que caracterizam o solo serão levadas em conta pelos parâmetros:

- ν = Relação de Poisson

- G = Módulo de Distorção (módulo de Corte, módulo cisalhante, *shear modulus*)

Estes parâmetros deverão ser fornecidos pelo Engenheiro Geotécnico na base de um estudo do solo. Se não se possui um informe detalhado e aos efeitos de um pré-dimensionamento poderá se assumir:

$0,25 < \nu < 0,35$ para solos não coesivos.

$0,35 < \nu < 0,45$ para solos coesivos.

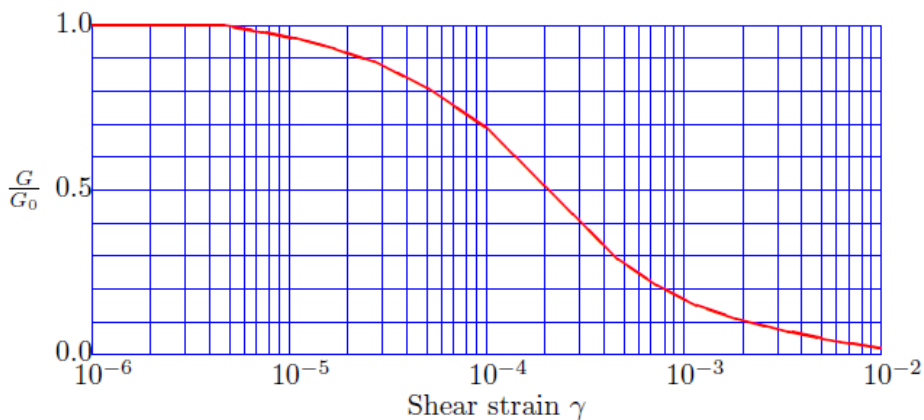
Poderemos dizer que uma estimativa adequada será baseada em assumir valores de Poisson de 0,30 para solos não coesivos e 0,40 para coesivos.

Os valores de G poderão ser obtidos mediante ensaios.

G variará bastante com a estratificação do subsolo já que varia com a pressão de confinamento, com o qual o valor de G assumido deverá ser uma média dos valores nos diferentes estratos.

Resulta importante destacar que G é o parâmetro mais relevante e o que pode variar em faixas bem largas de magnitude. Para pequenos valores da distorção G pode ser até 100 vezes maior que para distorções grandes. Nos ensaios de campo o que se obtém é a velocidade de propagação das ondas de corte c_s e da mesma se deduz o G a partir da relação:

$$G = \rho^2 c_s$$



Valores típicos de G:

Tipo de solo	G em kgf / cm ²
Argila branda	200 - 350
Argila rígida	700 - 1500
Argila muito rígida	> 1500
Areia medianamente densa	350 - 1000
Areia densa	700- 1500
Cascalho medianamente denso	1000 - 1500
Cascalho denso	1500 - 3000

Os Ensaio de campo (mais utilizados) para a avaliação do módulo de distorção dos solos são:

Ensaio	Princípio da técnica do ensaio	Nível de distorção
Sísmico entre furos de sondagem "Crosshole seismic testing"	determinação da velocidade de propagação das ondas de corte	$\sim 10^{-6}$
Sísmico ao longo de furos de sondagem, com fonte à superfície "Downhole seismic testing"		
Sísmico ao longo de furos de sondagem, com fonte no interior do furo "Upole"		
Piezocone sísmico		
"Refracção e reflexão sísmica"		
Vibração em regime permanente	determinação da velocidade de propagação das ondas de superfície	$\sim 10^{-6}$
Análise espectral de ondas de superfície		
Ensaio pressiométrico (auto-perfurador)	curva tensão-deformação	$> 10^{-3}$

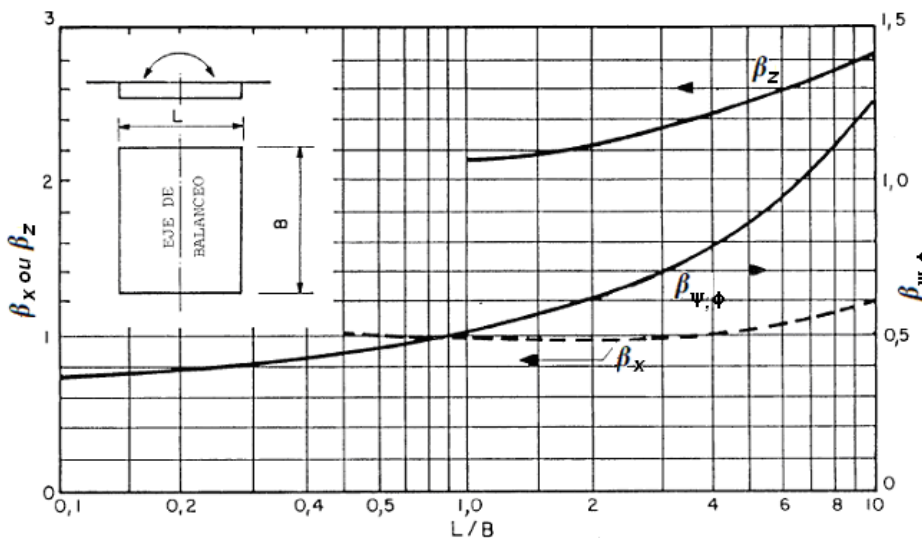
Para uma base circular rígida de raio r_0 os coeficientes de mola serão:

VERTICAL	$K_z = \frac{4Gr_0}{1-\nu}$
HORIZONTAL	$K_x = \frac{32(1-\nu)Gr_0}{7-8\nu}$
BALANCEIO	$K_\psi = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)}$
TORÇÃO	$K_\theta = \frac{16Gr_0^3}{3}$

Observe-se que para uma fundação circular: $K_x = K_y$, $K_\phi = K_\psi$,

Para **bases retangulares rígidas** os coeficientes de mola serão determinados de acordo a :

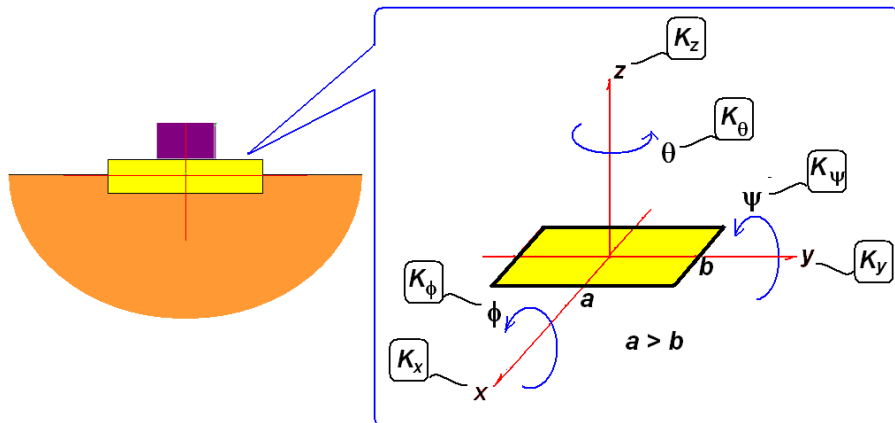
VERTICAL	$K_z = \frac{G}{1-\nu} \beta_z (BL)^{1/2}$
HORIZONTAL	$K_x = 2(1+\nu)G\beta_x (BL)^{1/2}$
BALANCEIO	$K_{\psi,\phi} = \frac{G}{1-\nu} \beta_{\psi,\phi} BL^2$



IMPORTANTE:

- A dimensão **L** é sempre a perpendicular ao eixo de rotação para as fórmulas de K_ϕ e K_ψ

As expressões dos parâmetros das molas para bases retangulares podem se resumir em:



$$K_x = K_y = 2(1+\nu)G\sqrt{(ab)}\beta_x$$

$$K_z = \frac{G}{1-\nu}\sqrt{(ab)}\beta_z$$

$$K_\phi = \frac{G}{1-\nu}a^2b\beta_\phi$$

$$K_\psi = \frac{G}{1-\nu}ab^2\beta_\psi$$

	a / b										
	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
β_x	1,00	0,98	0,98	0,98	1,00	1,02	1,05	1,10	1,12	1,15	1,20
β_z	2,15	2,19	2,21	2,35	2,42	2,50	2,60	2,65	2,75	2,80	2,85
β_ϕ	0,51	0,56	0,60	0,70	0,80	0,86	0,95	1,03	1,12	1,20	1,25
β_ψ	0,51	0,48	0,46	0,42	0,40	0,38	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37

Outra maneira de calcular os coeficientes de mola resulta de considerar uma base circular equivalente cujo raio para cada tipo de movimento é calculado pelas fórmulas:

Tipo de movimento	Rádio equivalente
Translacional (K_x , K_y , K_z)	$r_0 = \left(\frac{BL}{\pi} \right)^{1/2}$
Balanceio (K_ϕ , K_ψ) Um r_0 para K_ϕ e outro para K_ψ	$r_0 = \left(\frac{BL^3}{3\pi} \right)^{1/4}$
Torção (K_θ)	$r_0 = \left[BL \frac{(B^2 + L^2)}{6\pi} \right]^{1/4}$

Observe-se:

- Para balanceio teremos **2 raios equivalentes diferentes !!!** Para cada eixo de rotação o valor de L será o comprimento na direção perpendicular ao eixo de rotação.

- Uma base retangular que mediante o cálculo do raio equivalente indicado na tabela anterior será possível achar o coeficiente de mola de torção de bases retangulares.

O amortecimento da superestrutura resulta menos relevante que o amortecimento que resulta dos mecanismos no solo.

O amortecimento que resulta da propagação de ondas elásticas desde a base e desde a vizinhança da base ao maciço do solo se denomina “amortecimento geométrico” também conhecido como “amortecimento de radiação”.

Ademais do “amortecimento geométrico” existe no solo o “amortecimento interno” que é resultado da perda de energia na inversão de esforços devido à fricção entre partículas minerais do solo (em solos não coesivos secos), ou devido ao deslocamento do fluido intersticial.

Para o caso de fundações circulares rígidas, o amortecimento geométrico dos diferentes modos de vibração virá dado pelas expressões:

Modo(s)	Relação de Massa	Fator de Amortecimento Geométrico
Vertical	$B_z = \frac{(1-\nu)}{4} \frac{W_t}{\gamma_0^3}$	$D_z = \frac{0,425}{(B_z)^{1/2}}$
Horizontais	$B_x = \frac{(7-8\nu)}{32(1-\nu)} \frac{W_t}{\gamma_0^3}$	$D_x = \frac{0,288}{(B_x)^{1/2}}$
Balanceios	$B_{\psi,\phi} = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{I_{\psi,\phi} g}{\gamma_0^5}$	$D_{\psi,\phi} = \frac{0,15}{(1 + N_{\psi,\phi})(N_{\psi,\phi} B_{\psi,\phi})^{1/2}}$
Torção	$B_\theta = \frac{I_\theta g}{\gamma_0^5}$	$D_\theta = \frac{0,50}{1 + 2B_\theta}$

W_t = Peso total sobre a fundação γ = Peso específico do solo

B_ϕ	5	3	2	1	0.8	0.5	0.2
N_ϕ	1.079	1.110	1.143	1.219	1.251	1.378	1.600

O amortecimento interno não é considerado aos efeitos dos modos vertical e horizontais, já que o amortecimento geométrico resulta preponderante. O amortecimento geométricos dos modos rotacionais (balanceios e torção) são geralmente mais baixos e se incrementam em 5% assumindo assim a contribuição do amortecimento interno.

Os fatores de amortecimentos modais totais a serem levados em conta na análise serão de acordo a:

Modo(s)	Amortecimento modal equivalente:
Vertical	$\xi_{eq} z = D_z$
Horizontais	$\xi_{eq} y = \xi_{eq} x = D_x$
Balanceios	$\xi_{eq} \phi = D_\phi + 0,05$ $\xi_{eq} \psi = D_\psi + 0,05$
Torção	$\xi_{eq} \theta = D_\theta + 0,05$

Exemplo:

Seja uma base de dimensões 12m x 6m x 0,8 m sobre solo de Areia medianamente densa ($\gamma = 1,7 \text{ t / m}^3$) sobre a qual apoiaremos um equipamento de 56 t .

Os valores dos parâmetros do solo são:

$$G = 500 \text{ kgf / cm}^2 = 5000 \text{ tf / m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

Supondo que a base é infinitamente rígida:

$K_x = K_y = 2(1 + \nu)G\sqrt{(ab)}\beta_x$ $K_z = \frac{G}{1 - \nu}\sqrt{(ab)}\beta_z$ $K_\phi = \frac{G}{1 - \nu}a^2b\beta_\phi$ $K_\psi = \frac{G}{1 - \nu}ab^2\beta_\psi$	$\longrightarrow$	$K_x = K_y = 108100 \text{ tf/m}$ $K_z = 133946 \text{ tf/m}$ $K_\phi = 3,7 * 10^6 \text{ tfm/Rad}$ $K_\psi = 1,4 * 10^6 \text{ tfm/Rad}$
---	-------------------	--

	a / b										
	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
β_x	1,00	0,98	0,98	0,98	1,00	1,02	1,05	1,10	1,12	1,15	1,20
β_z	2,15	2,19	2,21	2,35	2,42	2,50	2,60	2,65	2,75	2,80	2,85
β_ϕ	0,51	0,56	0,60	0,70	0,80	0,86	0,95	1,03	1,12	1,20	1,25
β_ψ	0,51	0,48	0,46	0,42	0,40	0,38	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37

Calculamos os raios equivalentes:

Tipo de movimento	Rádio equivalente	
Translacional (K_x , K_y , K_z)	$r_0 = \left(\frac{BL}{\pi} \right)^{1/2}$	$\rightarrow r_{0_{tra}} = 4,79m$
Balanceio (K_ϕ , K_ψ) Um r_0 para K_ϕ e outro para K_ψ	$r_0 = \left(\frac{BL^3}{3\pi} \right)^{1/4}$	$\rightarrow$ $r_{0_\phi} = 5,76m$ $r_{0_\psi} = 4,07m$
Torção (K_θ)	$r_0 = \left[BL \frac{(B^2 + L^2)}{6\pi} \right]^{1/4}$	$\rightarrow r_{0_{tor}} = 5,12m$

Calculamos as relações de massa e os fatores de amortecimento:

Relação de Massa		Fator de Amortecimento Geométrico	
$B_z = \frac{(1-\nu)}{4} \frac{W_t}{\gamma_0^3} \rightarrow$	$B_z = 0,19$	$D_z = \frac{0,425}{(B_z)^{1/2}} \rightarrow$	$D_z = 0,98$
$B_x = \frac{(7-8\nu)}{32(1-\nu)} \frac{W_t}{\gamma_0^3} \rightarrow$	$B_x = 0,22$	$\rightarrow D_x = \frac{0,288}{(B_x)^{1/2}} \rightarrow$	$D_x = 0,62$
$B_{\psi,\phi} = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{I_{\psi,\phi} g}{\gamma_0^5} \rightarrow$	$B_\psi = 0,21$ $B_\psi = 0,30$	$D_{\psi,\phi} = \frac{0,15}{(1 + N_{\psi,\phi})(N_{\psi,\phi} B_{\psi,\phi})^{1/2}} \rightarrow$	$D_\phi = 0,10$ $D_\phi = 0,09$

B_ϕ	5	3	2	1	0.8	0.5	0.2
N_ϕ	1.079	1.110	1.143	1.219	1.251	1.378	1.600

Os valores de amortecimento de balanceio serão incrementados em 0,05 devido à contribuição do amortecimento interno:

$$\xi_{eq} z = 0,98$$

$$\xi_{eq} y = \xi_{eq} x = 0,62$$

$$\xi_{eq}\phi = 0,15$$

$$\xi_{eq}\psi = 0,14$$

4.7 Roteiro de análise de fundações superficiais de bases rígidas.

O visto em 2.6 permite gerar um modelo analítico simplificado de bases de máquinas montadas sobre fundações superficiais rígidas. Nesse modelo se baseia a metodologia do presente roteiro. Este roteiro será adequado sempre que não seja relevante analisar esforços da base. Nos casos que fogem destas hipóteses ou nos casos nos quais a complexidade geométrica ou operacional (multiplicidade de máquinas montadas sobre uma mesma base) deverão ser analisados de acordo a 2.8.

- a) Cálculo das constantes de mola da fundação :

$$K_x, K_y, K_z, K_\phi, K_\psi, K_\theta$$

- b) Cálculo da massa total **m** (levar em conta todas as massas solidárias com o sistema)

- c) Cálculo das Inércias respeito aos eixos x, y, z : I_x, I_y, I_z .

Atenção ! Não esquecer da contribuição nas inércias totais da massa da maquinaria e de outras massas suplementares solidárias com a base.

- d) Cálculo das frequências naturais:

$$fn_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_x}{m}} \quad fn_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad fn_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_z}{m}}$$

$$fn_\phi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\phi}{I_x}} \quad fn_\psi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\psi}{I_y}} \quad fn_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\theta}{I_z}}$$

- e) Cálculo dos fatores de amortecimento equivalente total:

$$\xi_{eq}x, \xi_{eq}y, \xi_{eq}z, \xi_{eq}\phi, \xi_{eq}\psi, \xi_{eq}\theta$$

f) Baseando-se na frequência f operacional da maquinaria, calcular os coeficientes de amplificação para cada modo:

$$M_q = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{f}{fn_q}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi_{eq,q} \frac{f}{fn_q}\right]^2} \quad \text{Para : } q = x, y, z, \phi, \psi, \theta$$

g) Cálculo das forças de desbalanceio de acordo a cada componente i que não estejam em fase, levando em conta todos os equipamentos atingindo os valores:

$$P_{xi}, P_{yi}, P_{zi} \quad \text{com } i=1, \dots, h$$

IMPORTANTE: O efeito de desbalanceamento de um rotor horizontal deve ser decomposto em 2 excitações: uma horizontal e outra vertical cuja fase entre elas é de um quarto de ciclo. Aos efeitos da análise serão 2 excitações diferentes (i diferente)

h) Cálculo dos momentos respeito aos eixos:

$$M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} \quad \text{com } i=1, \dots, h$$

i) Cálculo dos deslocamentos estáticos para $i=1, \dots, h$ de cada uma das coordenadas:

$$\begin{aligned} X_{ie} &= \frac{P_{xi}}{K_x} & y_{ie} &= \frac{P_{yi}}{K_y} & z_{ie} &= \frac{P_{zi}}{K_z} \\ \phi_{ie} &= \frac{M_{xi}}{K_\phi} & \psi_{ie} &= \frac{M_{yi}}{K_\psi} & \theta_{ie} &= \frac{M_{zi}}{K_\theta} \end{aligned}$$

Cálculo dos deslocamentos amplificados para $i=1, \dots, h$ de cada uma das coordenadas:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_i &= M_x x_{ie} \\
 \bar{y}_i &= M_y y_{ie} \\
 \bar{z}_i &= M_z z_{ie} \\
 \bar{\phi}_i &= M_{\phi} \phi_{ie} \\
 \bar{\psi}_i &= M_{\psi} \psi_{ie} \\
 \bar{\theta}_i &= M_{\theta} \theta_{ie}
 \end{aligned}$$

j) Cálculo para cada ponto de controle $\underline{C}$ de coordenadas : $(X_{oc} , Y_{oc} , Z_{oc})$ os deslocamentos resultantes para o ponto em questão associados aos valores de deslocamento amplificados das coordenadas (para cada $i=1,...h$)

$$(\delta_{xi} , \delta_{yi} , \delta_{zi})$$

Os pontos de controle serão definidos como os pontos nos quais os deslocamentos deverão ser avaliados.

k) Cálculo da estimativa de componentes de deslocamento máximo para cada ponto de controle e comprovação de que as mesmas não ultrapassam os limites admissíveis estipulados pelos fabricantes e pelas normas:

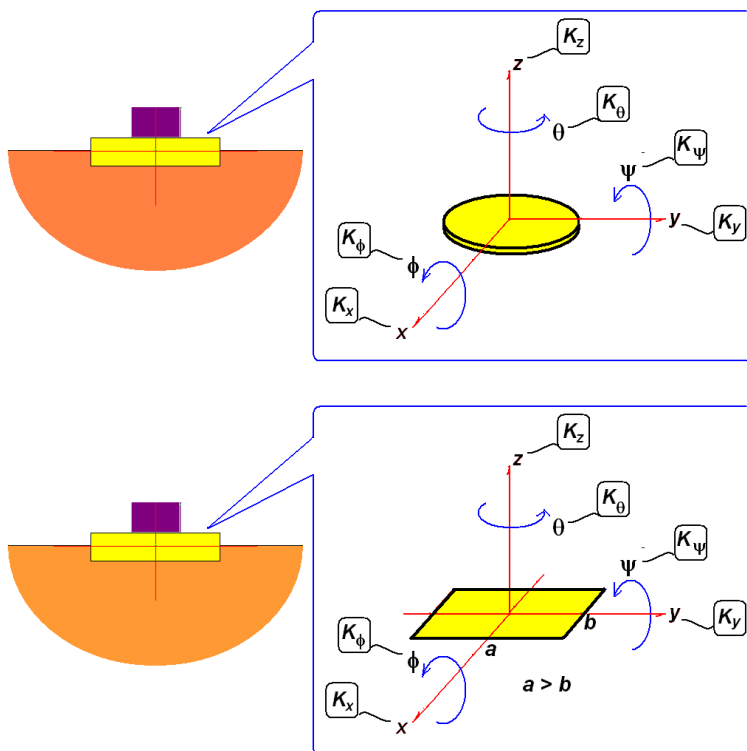
$$\begin{aligned}
 &(\delta_x^* , \delta_y^* , \delta_z^*) \\
 \delta_x^* &= \sqrt{\sum_{i=1}^h (\delta_{xi})^2} , \quad \delta_y^* = \sqrt{\sum_{i=1}^h (\delta_{yi})^2} , \quad \delta_z^* = \sqrt{\sum_{i=1}^h (\delta_{zi})^2} \\
 &\sqrt{(\delta_x^*)^2 + (\delta_y^*)^2 + (\delta_z^*)^2} < \delta_{adm}
 \end{aligned}$$

Observação: Idêntico será o procedimento nos casos de avaliação de outros parâmetros (velocidades, acelerações,...)

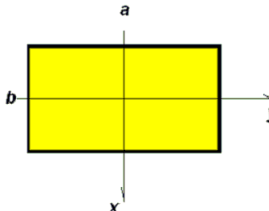
4.8 Parâmetros de molas nos modelos dinâmicos “discretizados” de bases retangulares de maquinaria de baixa freqüência.

Estudamos a resposta do solo para bases de maquinarias com fundação superficial como sistemas de 6 graus de liberdade, baseado na teoria do semi-espaco elástico. Agora veremos como deve se formular um modelo discretizado com molas que seja coerente com os resultados globais.

Usaremos o método dos raios equivalentes na determinação dos coeficientes de mola global da base retangular



Os raios equivalentes para cada coordenada:



$$r_{0x} = r_{0y} = r_{0z} = \left(\frac{ab}{\pi} \right)^{1/2}$$

$$r_{0\phi} = \left(\frac{a^3 b}{3\pi} \right)^{1/4} \quad r_{0\psi} = \left(\frac{ab^3}{3\pi} \right)^{1/4}$$

$$r_{0\theta} = \left[ab \frac{(a^2 + b^2)}{6\pi} \right]^{1/4}$$

Dai que os **coeficientes de mola globais** serão:

$$K_z = \frac{4G}{1-\nu} \left(\frac{ab}{\pi} \right)^{1/2} = \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{G}{1-\nu} (ab)^{1/2}$$

$$K_x = K_y = \frac{32(1-\nu)G}{7-8\nu} \left(\frac{ab}{\pi} \right)^{1/2} = \frac{32}{\pi^{1/2}} \frac{(1-\nu)G}{7-8\nu} (ab)^{1/2}$$

$$K_\phi = \frac{8G}{3(1-\nu)} \left(\frac{a^3 b}{3\pi} \right)^{3/4} = \frac{8}{3(3\pi)^{3/4}} \frac{G}{(1-\nu)} (a^3 b)^{3/4}$$

$$K_\psi = \frac{8G}{3(1-\nu)} \left(\frac{ab^3}{3\pi} \right)^{3/4} = \frac{8}{3(3\pi)^{3/4}} \frac{G}{(1-\nu)} (ab^3)^{3/4}$$

$$K_\theta = \frac{16G}{3} \left[ab \frac{(a^2 + b^2)}{6\pi} \right]^{3/4} = \frac{16}{3(6\pi)^{3/4}} G a^{3/4} b^{3/4} (a^2 + b^2)^{3/4}$$

Resumindo:

$K_z = 2,257 \frac{G}{1-\nu} (ab)^{1/2}$
$K_x = K_y = 18,054 \frac{(1-\nu)G}{7-8\nu} (ab)^{1/2}$
$K_\phi = 0,496 \frac{G}{(1-\nu)} a^{9/4} b^{3/4}$
$K_\psi = 0,496 \frac{G}{(1-\nu)} a^{3/4} b^{9/4}$
$K_\theta = 0,590 G a^{3/4} b^{3/4} (a^2 + b^2)^{3/4}$

Definindo os coeficientes de mola por unidade de superfície:

$$S_x, S_y, S_z, S_\phi, S_\psi, S_\theta$$

Atenção: As molas na direção z contribuem na respostas de balanceio e as molas na direções horizontais contribuem na resposta de torção. Será necessário levar em conta esse efeito e resultará errôneo distribuir as molas rotacionais uniformemente na interfase solo-estrutura, já que uma porção importante da resposta rotacional estará dada pelas molas translacionais. Isso leva à análise seguinte:

Os coeficientes de mola translacionais serão:

$$S_x = S_y = \frac{K_x}{ab} = \frac{K_y}{ab} 18,054 = \frac{(1-\nu)G}{7-8\nu} (ab)^{-1/2}$$

$$S_z = \frac{K_z}{ab} 2,257 = \frac{G}{1-\nu} (ab)^{-1/2}$$

Para que o modelo resulte globalmente consistente com a Teoria do Semi-espaço, os coeficientes de mola dos balanceios ficarão definidos a partir das identidades:

$$K_\phi = (S_\phi)ab + (S_z) \frac{a^3b}{12} \rightarrow S_\phi = \frac{K_\phi}{ab} - \frac{a^2}{12} S_z$$

$$K_\psi = (S_\psi)ab + (S_z) \frac{ab^3}{12} \rightarrow S_\psi = \frac{K_\psi}{ab} - \frac{b^2}{12} S_z$$

Ou seja:

$$S_\phi = 0,188a \left(\frac{a}{b} \right)^{1/4} \left[2,638 - \left(\frac{a}{b} \right)^{1/4} \right] \frac{G}{1-\nu}$$

$$S_\psi = 0,188b \left(\frac{b}{a} \right)^{1/4} \left[2,638 - \left(\frac{b}{a} \right)^{1/4} \right] \frac{G}{1-\nu}$$

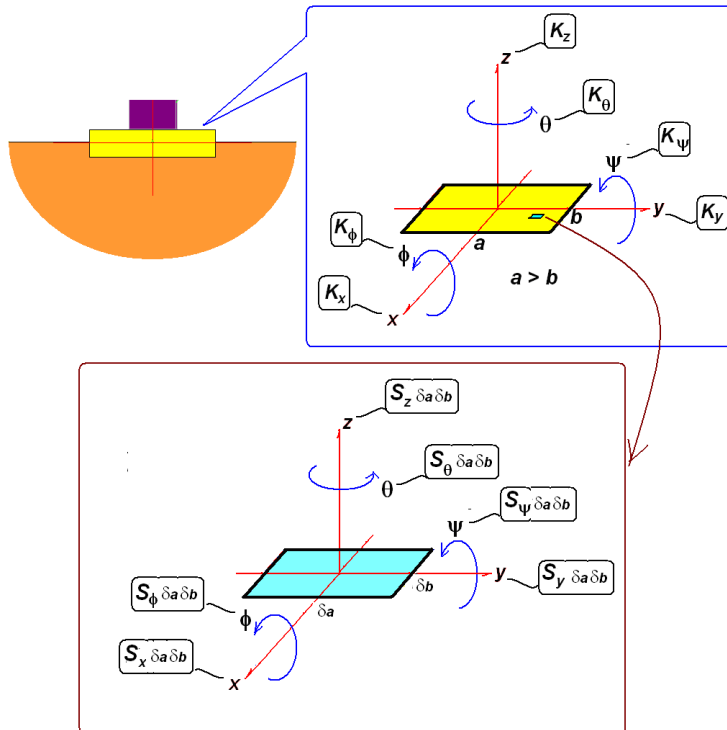
Em quanto às molas de torção:

$$K_{\theta} = S_{\theta}ab + S_x \left[\frac{a^3b}{12} + \frac{ab^3}{12} \right] \rightarrow S_{\theta} = \frac{K_{\theta}}{ab} - \frac{S_x}{12} (a^2 + b^2)$$

$$S_{\theta} = 0,590G \frac{(a^2 + b^2)^{3/4}}{a^{1/4}b^{1/4}} - 1,505 \frac{(1-\nu)G}{7-8\nu} \frac{(a^2 + b^2)}{a^{1/2}b^{1/2}}$$

Aprox. 0,16G

$$S_{\theta} = 0,590G \frac{(a^2 + b^2)^{3/4}}{a^{1/4}b^{1/4}} \left[1 - 0,408 \frac{(a^2 + b^2)^{1/4}}{a^{1/4}b^{1/4}} \right]$$



$$S_x = 18,054 = \frac{(1-\nu)G}{7-8\nu} (ab)^{-1/2}$$

$$S_z = 2,257 = \frac{G}{1-\nu} (ab)^{-1/2}$$

$$S_\phi = 0,188a \left(\frac{a}{b} \right)^{1/4} \left[2,638 - \left(\frac{a}{b} \right)^{1/4} \right] \frac{G}{1-\nu}$$

$$S_\psi = 0,188b \left(\frac{b}{a} \right)^{1/4} \left[2,638 - \left(\frac{b}{a} \right)^{1/4} \right] \frac{G}{1-\nu}$$

$$S_\theta = 0,590G \frac{(a^2 + b^2)^{3/4}}{a^{1/4}b^{1/4}} \left[1 - 0,408 \frac{(a^2 + b^2)^{1/4}}{a^{1/4}b^{1/4}} \right]$$

Uma vez realizada a análise modal e depois de reconhecer a natureza de cada modo se procede a efetuar a análise da resposta. Resulta necessário definir “fatores de amortecimento adequados a cada tipologia modal” (vertical, horizontal, balanceios, torção) de acordo ao visto no caso de base rígida:

Modo(s)	Amortecimento modal equivalente:
Vertical	$\xi_{eq} z = D_z$
Horizontais	$\xi_{eq} y = \xi_{eq} x = D_x$
Balanceios	$\xi_{eq} \phi = D_\phi + 0,05$ $\xi_{eq} \psi = D_\psi + 0,05$
Torção	$\xi_{eq} \theta = D_\theta + 0,05$

Modo(s)	Relação de Massa	Fator de Amortecimento Geométrico
Vertical	$B_z = \frac{(1-\nu)}{4} \frac{W_t}{\mathcal{H}_0^3}$	$D_z = \frac{0,425}{(B_z)^{1/2}}$
Horizontais	$B_x = \frac{(7-8\nu)}{32(1-\nu)} \frac{W_t}{\mathcal{H}_0^3}$	$D_x = \frac{0,288}{(B_x)^{1/2}}$

Balanceios	$B_{\psi,\phi} = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{I_{\psi,\phi} g}{\gamma_0^5}$	$D_{\psi,\phi} = \frac{0,15}{(1 + N_{\psi,\phi})(N_{\psi,\phi} B_{\psi,\phi})^{1/2}}$
Torção	$B_\theta = \frac{I_\theta g}{\gamma_0^5}$	$D_\theta = \frac{0,50}{1 + 2B_\theta}$

W_t = Peso total sobre a fundação γ = Peso específico do solo

B_ϕ	5	3	2	1	0.8	0.5	0.2
N_ϕ	1.079	1.110	1.143	1.219	1.251	1.378	1.600

Deve ser ressaltado que maquinarias de baixa e media frequência poderão estar excitando a base em ressonância com os modos fundamentais. Justamente para esses modos teremos que definir da maneira mais certa possível cada fator de amortecimento. Como foi explicado, o amortecimento resulta relevante unicamente no entorno das frequências ressonantes, e não possui maior relevância na resposta de modos não ressonantes. Ou seja, nos modos não ressonantes poderá ser definido qualquer fator de amortecimento sem afetar, maiormente a resposta.

Atenção:

Os valores altos das taxas de amortecimento especificadas nas fórmulas anteriores são conseqüências dos efeitos de emissão de energia no solo (amortecimento geométrico) e estão associados UNICAMENTE aos deslocamentos na interface solo-estrutura.

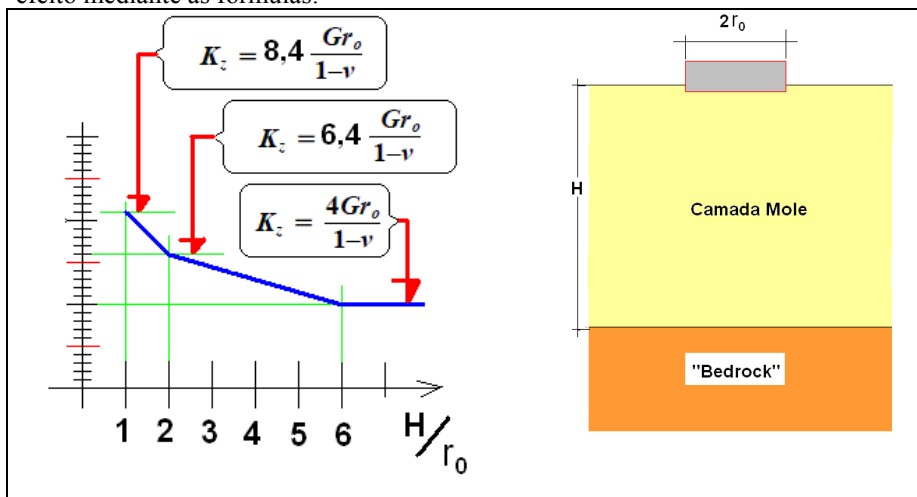
Na medida em que os deslocamentos modais sejam tais que não possa se assumir que a superestrutura seja rígida, deverão ser assumidos fatores de amortecimento reduzidos (abaixo dos 5% de acordo aos parágrafos anteriores). Ou seja, deve se efetuar uma cuidadosa interpretação da tipologia de cada modo com o objetivo de assinar as taxas de amortecimento especificadas anteriormente unicamente aos modos que envolvam deslocamentos “rígidos da superestrutura”.

4.9 Modelos dinâmicos para fundação superficial em solos estratificados (*Baseado em valores obtidos por Richart, Hall and Woods*)

As fórmulas expostas em 4.6, 4.7, 4.8 estão baseadas na teoria do Semi-espaço Elástico. De acordo à mesma se supõe o solo como Homogêneo e Isotrópico. Nas formulas expostas a relação esforço deformação do solo é definida pelos parâmetros G e ν .

Na realidade, a resposta de deformação e o amortecimento que resultam da ação dinâmica dependem da frequência da excitação. A dependência da frequência resulta inconveniente para modelar, por isso se geraram expressões simplificadas nas quais o solo é representado como conjuntos de molas cuja resposta (que não é dependente da frequência) foi calibrada para baixas frequências. Resulta importante lembrar que a independência da rigidez e o amortecimento respeito à frequência serão válidos somente para baixas frequências (que é a faixa na qual foram calibrados os parâmetros de mola e amortecimento).

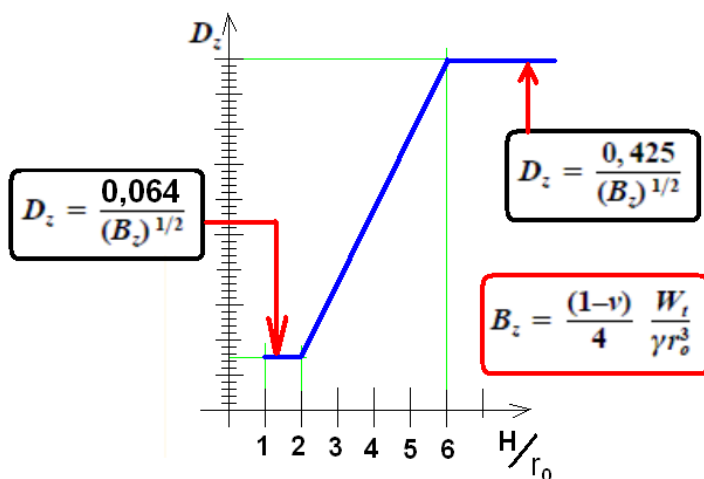
Na presença de um substrato rígido por baixo da camada superficial mais mole, os parâmetros estruturais associados à resposta dinâmica apresentam alterações muito importantes que devem ser levadas em conta. Quanto menor seja a espessura da camada mole o valor do coeficiente de mola K_z será maior. Pode se estimar esse efeito mediante as fórmulas:



Para bases retangulares de lados a, b , r_0 será assumido como r_{0z} :

$$r_{0z} = \left(\frac{ab}{\pi} \right)^{1/2}$$

Da mesma maneira deverão se adotar taxas de amortecimento D_z (geométrico) ajustadas à espessura da camada mole:



Os efeitos mais relevantes da interação solo-estrutura estão associados à ressonância que pode se dar com maquinarias de baixa frequência. Essa ressonância terá como resultado implícito o desempenho inadequado da maquinaria e também induzirá vibrações à vizinhança. Mas pode não somente acontecer a indesejável amplificação, os efeitos também podem implicar recalques do solo e mesmo o colapso funcional da fundação. Por isso, um grande problema é a dificuldade em estimar assertivamente a frequência natural e a taxa de amortecimento do solo. A isso se agrega o fato já mencionado de esses parâmetros serem dependentes da frequência (também da amplitude) da excitação.

Às vezes uma fundação pode ter um desempenho adequado apesar de ter sido mal dimensionada. Uma explicação para isso é que a taxa de amortecimento cresce muito quando as solicitações sobre o solo são elevadas, o que implica menores fatores de amplificação dos que poderiam ser estimados inicialmente.

As propriedades dinâmicas do solo a serem assumidas na análise (rigidez e amortecimento) são geralmente muito indeterminadas e não é suficiente reconhecer a classe de solo. A resposta estará também governada de maneira não proporcional pela amplitude da excitação, pela frequência da mesma, pela geometria da fundação, e pela estratificação do solo.

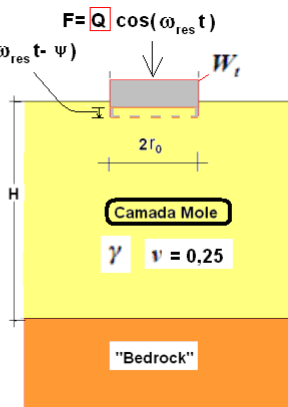
Aos efeitos de ajustar a estimativa dos efeitos de ressonância em solo estratificado podem se aplicar às fórmulas:

A= Amplitude de deslocamento em ressonância

$$A = \alpha \frac{Q}{G r_0}$$

$$z(t) = A \cos(\omega_{res} t - \psi) \quad F = Q \cos(\omega_{res} t)$$

		$\frac{W_t}{\gamma r_0^3}$			
		5	10	20	30
$\frac{H}{r_0}$	1	1,087	2,063	3,938	5,438
	2	1,500	3,000	5,813	7,688
	3	1,181	2,325	4,463	5,882
	4	0,863	1,650	3,113	4,097
	5	0,544	0,975	1,763	2,302
	6	0,225	0,300	0,413	0,506



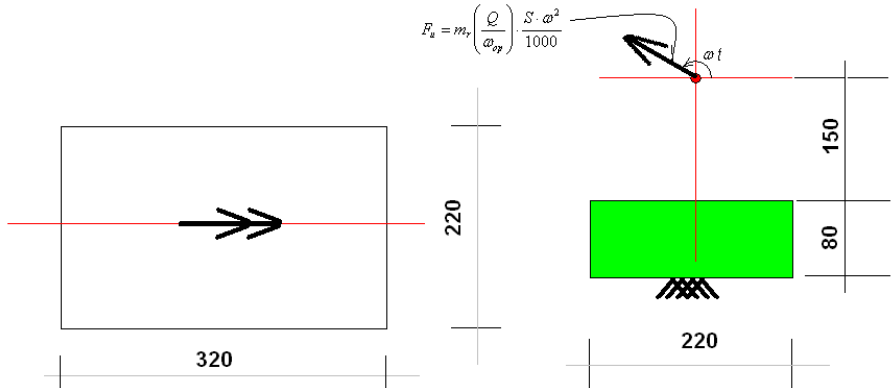
f_{res} = Frequência de ressonância

$$f_{res} = \beta \sqrt{\frac{Gg}{\gamma r_0^2}}$$

		$\frac{W_t}{\gamma r_0^3}$			
		5	10	20	30
$\frac{H}{r_0}$	1	0,210	0,160	0,120	0,097
	2	0,150	0,120	0,094	0,080
	3	0,138	0,115	0,091	0,076
	4	0,125	0,110	0,087	0,072
	5	0,113	0,105	0,084	0,068
	6	0,100	0,100	0,080	0,064

4.10 Exemplo de avaliação analítica de uma base que sustenta um ventilador industrial

Um ventilador industrial cujo rotor pesa 363kg e cuja frequência operacional é 2250 rpm será montado sobre a base de concreto de acordo ao esquema:



A massa total do equipamento é de 3330 kg.

A base é de fundação direta sobre areia medianamente densa : $G = 700 \text{ kgf / cm}^2$,
 $\nu = 0,30$.

O desbalanceio do rotor gerará uma força radial que pode ser estimada de acordo a ISO 1940 para Fator de Qualidade G6.3:

$$F_u = m_r \left(\frac{Q}{\omega_{op}} \right) \cdot \frac{S \cdot \omega^2}{1000} \quad [N]$$

F_u = amplitude da força em Newton.

$m_r = 363 \text{ kg}$

$Q = 6,3$ valor estipulado na 2ª coluna da tabela [mm/s] em função do tipo de rotor.

$S = 2,5$ (vezes). Coeficiente de amplificação normalizada.

$\omega_{op} = 236 \text{ Rad/s} = (2250/60) * 2\pi =$ frequência angular operacional do giro do rotor ($f = 37,6 \text{ Hz}$, $T = 0,027 \text{ s}$).

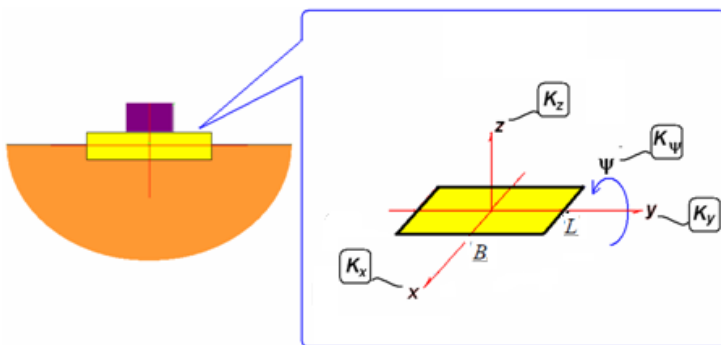
$\omega < 236$ Rad/s frequência angular do rotor para a qual se realiza o cálculo da força.

$$F_u = 363 \left(\frac{6,3}{236} \right) \cdot \frac{2,5 \cdot \omega^2}{1000} = 0,024 \omega^2 (N) = \frac{\omega^2}{413} = 0,0955 f^2 (kgf)$$

Ou seja, na frequência operacional ($f = 37,6$ Hz) $F_u = 0,135$ tf, e para qualquer frequência intermédia f :

$$F_u = \frac{f^2}{10470} \quad (\text{tf})$$

Os parâmetros de resposta da base resultantes da teoria do semi-espaço elástico serão para a base em questão:



Tipo de movimento	Rádio equivalente	
Translacional (K_x, K_y, K_z)	$r_o = \left(\frac{BL}{\pi} \right)^{1/2}$	1,50 m
Balanceio K_ψ	$r_o = \left(\frac{BL^3}{3\pi} \right)^{1/4}$	1,38 m

Os coeficientes de mola equivalentes serão:

VERTICAL	$K_z = \frac{4Gr_0}{1-\nu}$
HORIZONTAL	$K_x = \frac{32(1-\nu)Gr_0}{7-8\nu}$
BALANCEIO	$K_\psi = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)}$

$$K_z = 60000 \text{ tf/m}$$

$$K_x = 51130 \text{ tf/m}$$

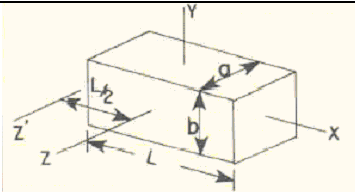
$$K_\psi = 70082 \text{ tf m/Rad}$$

Calcularemos agora as taxas de amortecimento modais globais:

$$W_t = \text{Peso total na fundação} = 2,2 * 3,2 * 0,8 * 2,5 + 3,33 = 14,08 + 3,33 = 17,41 \text{ tf}$$

$$\gamma = \text{Peso específico do solo} = 1,8 \text{ tf/m}^3$$

0,5	Modo(s)	Relação de Massa	Fator de Amortecimento Geométrico																	
	Vertical	$B_z = \frac{(1-\nu)}{4} \frac{W_t}{\gamma_0^3}$	$D_z = \frac{0,425}{(B_z)^{1/2}}$	0,6																
	Horizontais	$B_x = \frac{(7-8\nu)}{32(1-\nu)} \frac{W_t}{\gamma_0^3}$	$D_x = \frac{0,288}{(B_x)^{1/2}}$	0,375																
	Balaceios	$B_{\psi,\phi} = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{I_{\psi,\phi} g}{\gamma_0^5}$	$D_{\psi,\phi} = \frac{0,15}{(1+N_{\psi,\phi})(N_{\psi,\phi} B_{\psi,\phi})^{1/2}}$	0,096																
0,59		0,232		N=1,58																
<table><tr><td>B_ϕ</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0.8</td><td>0.5</td><td>0.2</td></tr><tr><td>N_ϕ</td><td>1.079</td><td>1.110</td><td>1.143</td><td>1.219</td><td>1.251</td><td>1.378</td><td>1.600</td></tr></table>					B_ϕ	5	3	2	1	0.8	0.5	0.2	N_ϕ	1.079	1.110	1.143	1.219	1.251	1.378	1.600
B_ϕ	5	3	2	1	0.8	0.5	0.2													
N_ϕ	1.079	1.110	1.143	1.219	1.251	1.378	1.600													

PRISMA RETANGULAR		$I_x = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(a^2 + L^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(b^2 + L^2)$ $I_z = I_z + mL^2/4$
-------------------	---	--

Modo(s)	Amortecimento modal equivalente: ξ_{eq}
Vertical	$\xi_{eq} z = D_z = 0,60$
Horizontais	$\xi_{eq} y = \xi_{eq} x = D_x = 0,375$
Balanceios	$\xi_{eq} \psi = D_\psi + 0,05 = 0,146$

A partir dos parâmetros achados analisaremos as respostas para os estados funcionais:

A) Frequência operacional $f_{op} = 37,6$ Hz

B) Para cada frequência de rotação intermédia $f_i < 37,6$ Hz, para a qual possa se produzir ressonância (frequências de ressonância da estrutura que sejam menores que 37,6 Hz) .

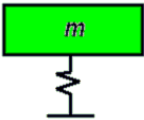
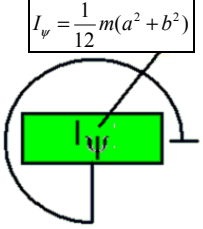
Em cada caso a excitação estará dada por 2 componentes no centro de gravidade do rotor (e no plano normal ao eixo do mesmo):

- Componente Horizontal: $F = f_u$, frequências = f_{op}, f_i , $T_0 = 0$

- Componente Vertical: $F = f_u$, frequências = f_{op}, f_i , $T_0 = 0,25$ T= $0,25 / f$

A velocidade de deslocamento aceitável de acordo a VDI será de até 4,5 mm/s (tolerável até 11 mm/s)

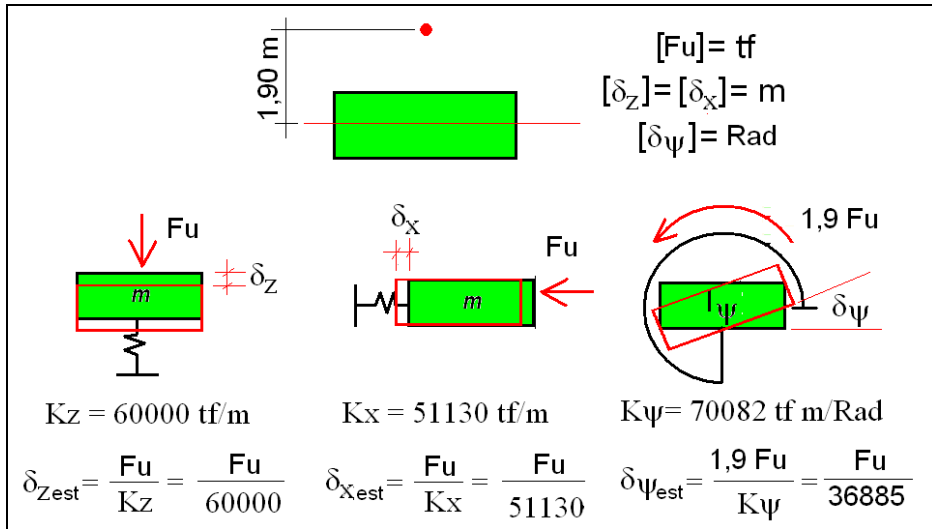
As frequências naturais dos modos próprios serão:

		 $I_{\psi} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
$K_z = 60000 \text{ tf/m}$ $= 6 \text{ E}+8 \text{ N/m}$	$K_x = 51130 \text{ tf/m}$ $= 5,11\text{E}+8 \text{ N/m}$	$K_{\psi} = 70082 \text{ tf m/R}$ $= 7,01\text{E}+8 \text{ Nm/R}$
$m = 17410 \text{ kg}$	$m = 17410 \text{ kg}$	$I_{\psi} = 7950 \text{ kg m}^2$
$f_z = (1/2\pi) \sqrt{\frac{K_z}{m}}$	$f_x = (1/2\pi) \sqrt{\frac{K_x}{m}}$	$f_{\psi} = (1/2\pi) \sqrt{\frac{K_{\psi}}{I_{\psi}}}$
↓	↓	↓
$f_z = 29,6 \text{ Hz}$	$f_x = 27,3 \text{ Hz}$	$f_{\psi} = 47,3 \text{ Hz}$

Deverão ser analisados os 3 estados de excitação relevantes:

Estado de Excitação	Caracterização	Frequência
1	Ressonância Modo Trans. Horiz.	$f = f_x = 27,3 \text{ Hz}$
2	Ressonância Modo Trans. Vertical	$f = f_{op} = 29,6 \text{ Hz}$
3	Frequência operacional	$f = f_{op} = 37,6 \text{ Hz}$

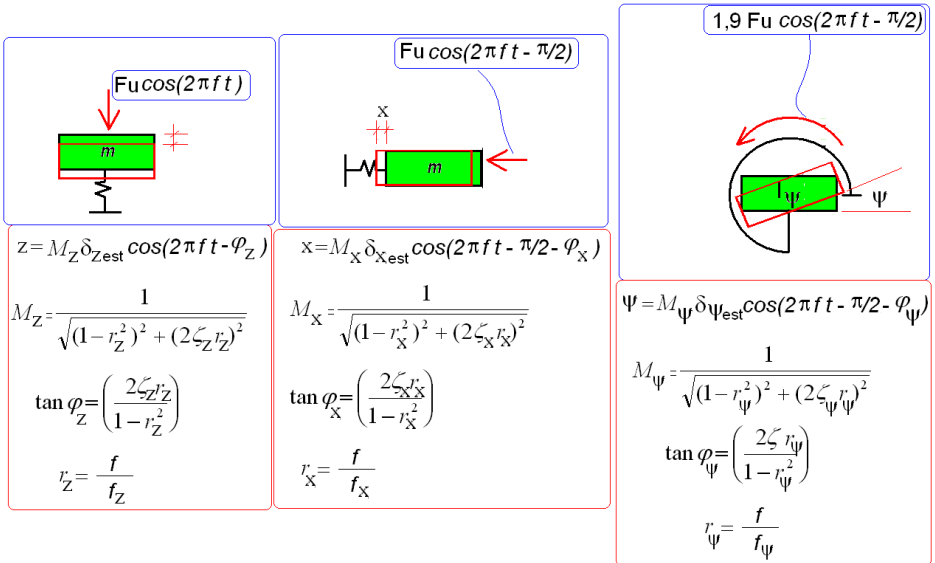
As respostas estáticas associadas aos diferentes modos são:



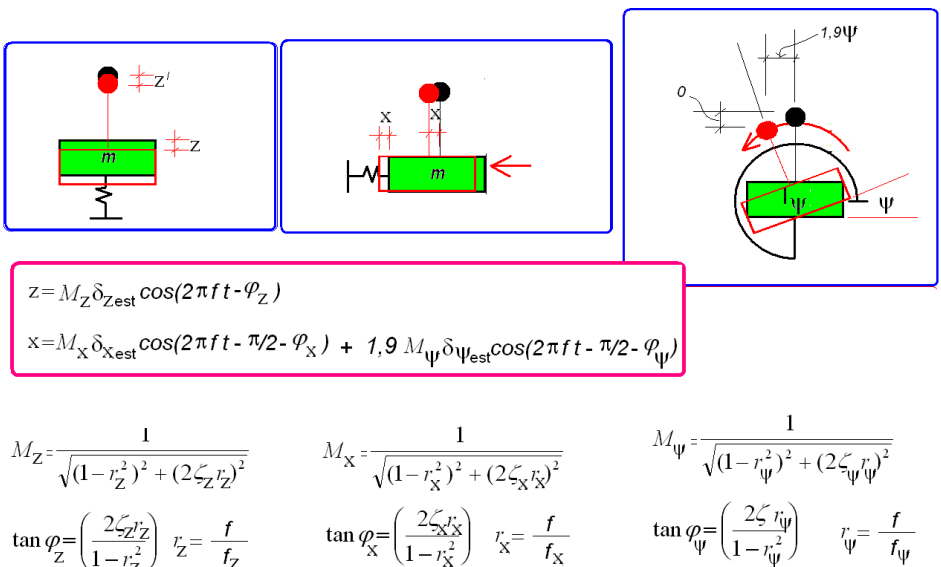
Daí que os deslocamentos estáticos modais para as frequências relevantes serão:

Estado de Excitação	Frequência (Hz)	$F_u = \frac{f^2}{10470} \text{ (tf)}$	δ_{est} (m, Rad)		
			MODO VERTICAL	MODO HORIZ.	MODO de BALACEIO
1	$f=27,3 \text{ Hz}$	0,071	1,18 E-6	1,39 E-6	1,92 E-6
2	$f=29,6 \text{ Hz}$	0,084	1,40 E-6	1,64 E-6	2,27 E-6
3	$f=37,6 \text{ Hz}$	0,135	2,25 E-6	2,64 E-6	3,66 E-6

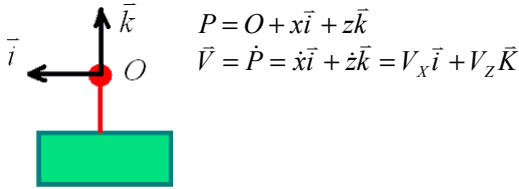
As respostas dinâmicas de deslocamentos generalizados associadas aos diferentes modos resultam:



As respostas dinâmicas de deslocamentos ao nível do rotor associadas aos diferentes modos serão:



As respostas dinâmicas de velocidades ao nível do rotor associadas aos diferentes modos resultarão:



$$V_x = -2\pi f M_x \delta_{x_{est}} \sin(2\pi f t - \pi/2 - \varphi_x) - 2\pi f * 1,9 M_\psi \delta_{\psi_{est}} \sin(2\pi f t - \pi/2 - \varphi_\psi)$$

$$V_z = -2\pi f M_z \delta_{z_{est}} \sin(2\pi f t - \varphi_z)$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_z^2}$$

Daí que uma condição suficiente (não necessária) de aceitabilidade da velocidade de resposta será:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_z^2} < 2\pi f \sqrt{[M_z \delta_{z_{est}}]^2 + [M_x \delta_{x_{est}} + 1,9 M_\psi \delta_{\psi_{est}}]^2}$$

Se:

$$2\pi f \sqrt{[M_z \delta_{z_{est}}]^2 + [M_x \delta_{x_{est}} + 1,9 M_\psi \delta_{\psi_{est}}]^2} < V_{allow} \quad |\vec{V}| < V_{allow}$$

Se a condição suficiente não se cumprir deverá ser analisada a historia no tempo!!!

Nos estados de avaliação resultará:

Estado de avaliação 1, $f = 27,3$ Hz

f= 27,3 Hz		MODO VERTICAL	MODO HORIZON	MODO de BALACEIO
Desloc. Estático em m , Rad	δ_{est}	1,18 E-6	1,39 E-6	1,92 E-6
Freq. de Ress	f_r	29,6 Hz	27,3 Hz	47,3 Hz
Relação de freq.	$r = f / f_r$	0,92	1,00	0,58
Taxa de Amortecimento Modal	ξ_{eq}	0,60	0,375	0,146
Amplificação Modal	M	0,90	1,33	1,46
Componentes de amplitudes de deslocamentos ao nível do rotor				
Z	$M_Z \delta_{Zest}$	1,062 E-6		
X	$M_X \delta_{Xest}$		1,85 E-6	
	$1,9M_\psi \delta_{\psi est}$			5,32 E-6
Cota superior de velocidades v*; v < v*= $2\pi f \sqrt{[M_Z \delta_{Zest}]^2 + [M_X \delta_{Xest} + 1,9M_\psi \delta_{\psi est}]^2}$				
v*		1,24 E-3 m/s = 1,24 mm/s		
Conclusão @ f= 27,3 Hz : velocidade < 1,24 mm/s				

Estado de avaliação 2 , $f=29,6$ Hz

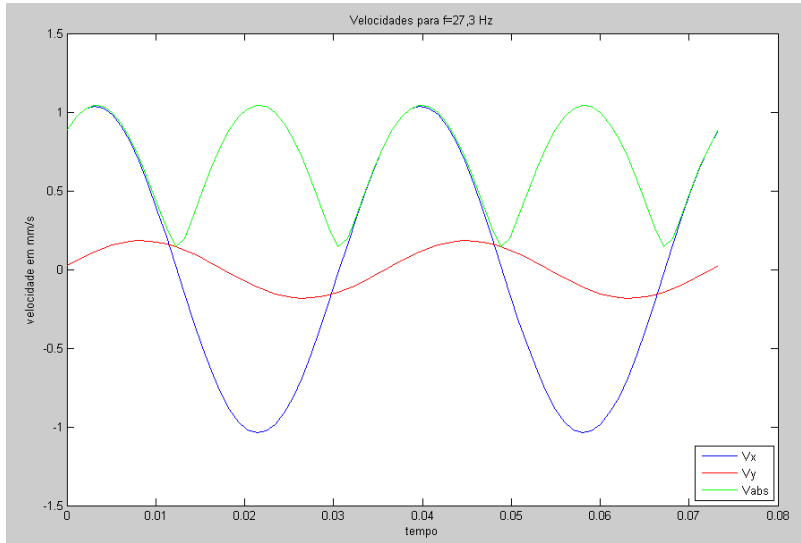
f=29,6 Hz		MODO VERTICAL	MODO HORIZON	MODO de BALACEIO
Deslocamento Estático em m , Rad	δ_{est}	1,40 E-6	1,64 E-6	2,27 E-6
Freq. de Ress	f_r	29,6 Hz	27,3 Hz	47,3 Hz
Relação de freq.	$r = f / f_r$	1,00	1,08	0,63
Taxa de Amortecimento Modal	ξ_{eq}	0,60	0,375	0,146
Amplificação Modal	M	0,83	1,21	1,58
Componentes de amplitudes de deslocamentos ao nível do rotor				
Z	$M_Z \delta_{Zest}$	1,16 E-6		
X	$M_X \delta_{Xest}$		1,98 E-6	
	$1,9M_\psi \delta_{\psi est}$			6,81 E-6
Cota superior de velocidades v*; v < v*=				
$2\pi f \sqrt{[M_Z \delta_{Zest}]^2 + [M_X \delta_{Xest} + 1,9M_\psi \delta_{\psi est}]^2}$				
v*			1,65 E-3 m/s = 1,65 mm/s	
Conclusão @ f= 29,6 Hz : velocidade < 1,65 mm/s				

Estado de avaliação 3, $f=37,6$ Hz

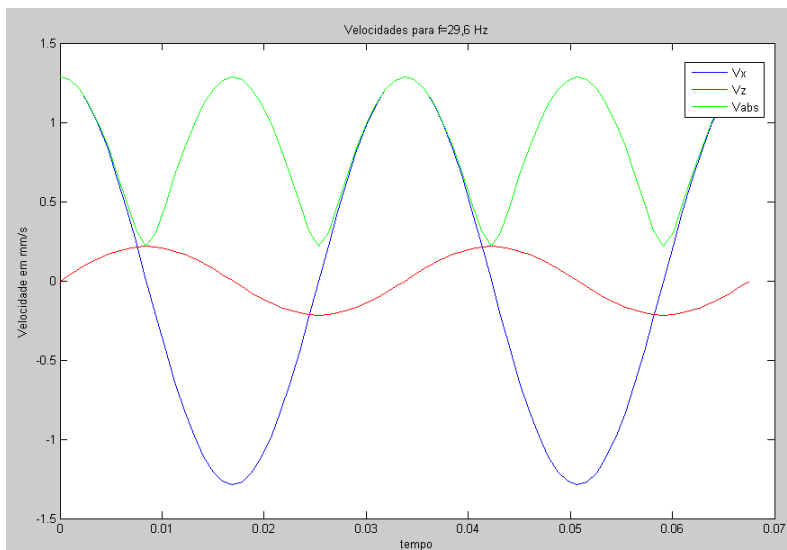
f=37,6 Hz		MODO VERTICAL	MODO HORIZON	MODO de BALACEIO
Deslocamento Estático em m , Rad	δ_{est}	2,25 E-6	2,64 E-6	3,66 E-6
Freq. de Ress	f_r	29,6 Hz	27,3 Hz	47,3 Hz
Relação de freq.	$r = f / f_r$	1,27	1,38	0,79
Taxa de Amortecimento Modal	ξ_{eq}	0,60	0,375	0,146
Amplificação Modal	M	0,61	0,73	2,27
Componentes de amplitudes de deslocamentos ao nível do rotor				
Z	$M_Z \delta_{Zest}$	1,37 E-6		
X	$M_X \delta_{Xest}$		1,93 E-6	
	$1,9M_\psi \delta_{\psi est}$			15,79 E-6
Cota superior de velocidades v*; v < v*= $2\pi f \sqrt{[M_Z \delta_{Zest}]^2 + [M_X \delta_{Xest} + 1,9M_\psi \delta_{\psi est}]^2}$				
v*			4,20 E-3 m/s = 4,20 mm/s	
Conclusão @ f= 37,6 Hz : velocidade < 4,20 mm/s				

Os gráficos de velocidades resultantes são:

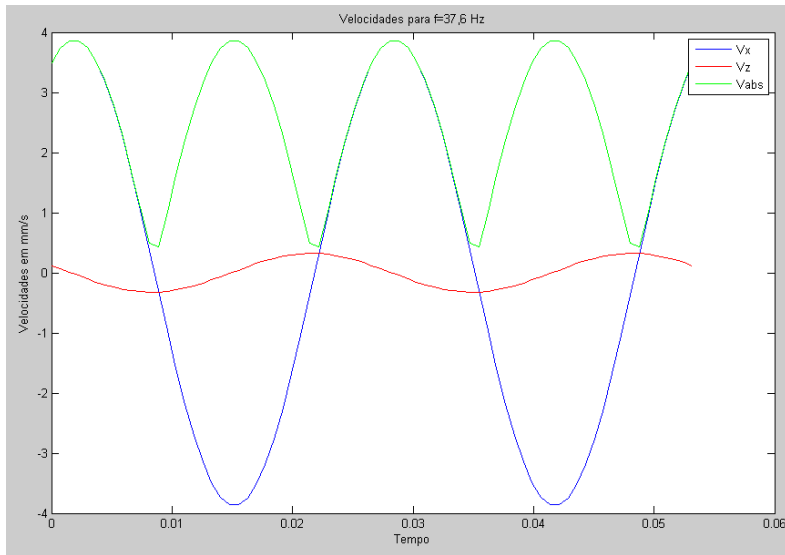
Para $f = 27.3$ Hz:



$f = 29.6$ Hz



$$f = 37,6 \text{ Hz}$$



A velocidade de oscilação não ultrapassará os **4,5 mm/s** no nível do eixo do rotor do ventilador descrito. Ou seja, que a bases resultam funcionalmente adequadas para sustentar o ventilador em questão (nas hipóteses de solo de areia medianamente densa).

4.11 Bases de equipamentos sobre estacas

4.11.1 Importância e dificuldade da geração de modelos realistas

Nos casos nos quais as condições do solo não permitem atingir um desempenho adequado com fundação superficial será necessário executar a base sobre estacas.

Na presença de cargas dinâmicas, as estacas apresentam um desempenho bastante diferente ao que estamos acostumados a obter quando as cargas são estáticas. Quando as cargas atuantes são estáticas sabemos que as estacas serão eficientes na diminuição de deslocamentos. Quando as cargas são cíclicas nas fundações sobre estacas poderão surgir dois efeitos muito indesejáveis:

- a) Diminuição do amortecimento geométrico.

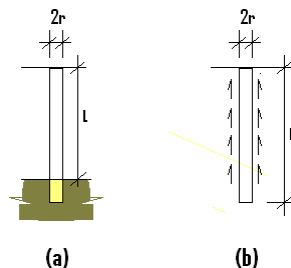
- b) Incremento da frequência natural que pode eventualmente levar à ressonância (frequência natural similar à da excitação)

Isso leva a que seja importante desenvolver um modelo realista da interação, e lembrar que nem sempre a suposição de flexibilidade excessiva da estaca resultará do lado da segurança.

É muito comum que as estacas resultem muito mais flexíveis para solicitações horizontais que verticais. Por isso em muitos casos as frequências naturais dos modos horizontais serão bem mais baixos que a frequência vertical. Se a excitação for preponderantemente vertical e de baixa frequência, a estratégia será conseguir que a frequência natural vertical resulte bem maior (2 vezes) que a frequência da excitação, e assim levar o problema a quase- estático. Mas poderá acontecer que ao enrijecer verticalmente também estejamos incrementando demais as frequências naturais horizontais, levando a que a componente horizontal da excitação esteja sintonizada com os modos próprios horizontais. Poderemos tentar controlar esse efeito modulando os parâmetros de massa e de flexibilidade horizontal (usando por exemplo mais estacas de menor diâmetro). A execução de estacas inclinadas pode ser uma estratégia adequada em certos casos, mas geralmente resulta em dificuldades na execução (no Brasil resulta uma solução pouco usual).

Desenvolver uma análise assertiva da resposta de estacas resulta muito difícil e conjuga uma grande quantidade de parâmetros do solo que nem sempre podem ser estimados com a necessária confiabilidade. Em muitos casos será necessário testar a estrutura para combinações diferentes desses parâmetros para ter a certeza que a resposta real da estrutura será satisfatória.

Os parâmetros relevantes para a geração dos modelos de resposta serão os coeficientes de mola e taxas de amortecimento equivalente. São muitas as características que influenciam na determinação desses parâmetros: diâmetros e longitudes das estacas, módulo elástico do concreto, módulo de cisalhamento do solo, estratificação do solo, distancias entre estacas, e outros. Em geral o uso de estacas estará associado à impossibilidade do solo de sustentar a carga. Ou seja, que o uso de estacas em geral estará associado a solos cujas capas superficiais possuem módulos de cisalhamento baixos. Dever-se-á distinguir entre casos nos quais se atinge um estrato firme a certa profundidade (a), e o caso (b) no qual a estaca trabalhará basicamente a fricção. No primeiro deles, para o caso no qual se atinja um estrato de rocha, a estaca poderá ser assumida quase como um pilar apoiado no estrato rijo (com contribuição depreciável da fricção do estrato intermediário), e os parâmetros relevantes serão a profundidade da rocha e as características da estaca. No segundo caso, a caracterização adequada dos estratos serão os dominantes na determinação dos parâmetros de resposta.



A continuação analisaremos uma metodologia de obtenção de estimativas de parâmetros de resposta de estacas baseada nos estudos desenvolvidos por Milos Novak em parceria com outros prestigiosos pesquisadores.

4.11.2 Parâmetros de resposta para modos verticais

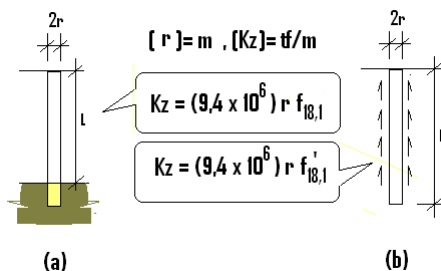
Considerando uma estaca isolada os parâmetros de resposta que devemos estimar para a análise serão :

k_z : coeficiente de mola vertical

D_z : taxa de amortecimento geométrico vertical

4.11.2.1 Determinação do coeficiente de mola vertical para uma estaca isolada

As estimativas de k_z terão a expressão :



Onde os parâmetros $f_{18,1}$ e $f'_{18,1}$ podem ser calculados em função do comprimento L e do módulo de cisalhamento G_s do solo de acordo à tabela simplificada:

		L/r						
		10	20	30	40	60	80	100
200 kgf/cm ²	$f_{18,1}$	0,100	0,052	0,038	0,030	0,025	0,022	0,022
	$f'_{18,1}$	0,008	0,010	0,013	0,017	0,020	0,022	0,022
350 kgf/cm ²	$f_{18,1}$	0,100	0,055	0,042	0,034	0,030	0,028	0,028
	$f'_{18,1}$	0,012	0,018	0,023	0,027	0,028	0,028	0,028
500 kgf/cm ²	$f_{18,1}$	0,100	0,060	0,047	0,040	0,036	0,036	0,036
	$f'_{18,1}$	0,020	0,028	0,032	0,036	0,036	0,036	0,036

Por exemplo, o coeficiente de mola vertical de uma estaca de diâmetros 50 cm e comprimento 10 metros em argila com $G=350$ kgf/cm² será:

$$K_z = (9.4 \times 10^6) \times 0,25 \times 0,027 = 63450 \text{ tf/m}$$

Observe-se que se for o caso de uma estaca de 50 cm de diâmetro que atinge uma capa de rocha rija a 2,5 metros de profundidade, o coeficiente de mola vertical será:

$$K_z = 9400000 \times 0,25 \times 0,100 = 235000 \text{ tf/m}$$

Fazendo o cálculo de acordo ao encurtamento de um pilar de altura 2,5 metros e assumindo que o concreto da estaca é C30:

$$f_{ck} = 30 \text{ MPa} = 300 \text{ kgf/cm}^2$$

$$E_{ci} = 5600 (f_{ck})^{1/2} = 30670 \text{ MPa} = 3.0 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 = 3.0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

$$EA/L = 3000000 \times 0,196/2,5 = 235200 \text{ tf/m}$$

Em geral para casos de estrato rijo para $L=10r$, desprezando a contribuição da fricção, o coeficiente de mola vertical resulta:

$$K_z = E(A/L) = E [\pi r / (L/r)] = (E \pi) r (0,1)$$

Para $E = 3.0 \times 10^6$ tf/m² resulta coerente que $f_{18,1}$ seja igual a 0,100.

Resulta útil poder modelar as estacas como pilares rijos na ponta. Na base dos resultados da tabela poderíamos deduzir qual seria o comprimento de estaca equivalente L_{eq} que seria coerente com o deslocamento vertical do extremo superior.

$$EA/L' = (E \pi) r^4 f_{18,1}$$

$$L_{eq}/r = 1/f_{18,1}$$

Resulta ilustrativo visualizar na tabela a influencia das propriedades do solo no comprimento do pilar equivalente.

Gs	Pilar Equiva- lente	L/r						
		10	20	30	40	60	80	100
200 kgf/cm ²	L_{eq}/r	10,0	19,2	26,3	33,3	40,0	45,5	45,5
	L'_{eq}/r	125,0	100,0	76,9	58,8	50,0	45,5	45,5
350 kgf/cm ²	L_{eq}/r	10,0	18,2	23,8	29,4	33,3	35,7	35,7
	L'_{eq}/r	83,3	55,6	43,5	37,0	35,7	35,7	35,7
500 kgf/cm ²	L_{eq}/r	10,0	16,7	21,3	25,0	27,7	27,7	27,7
	L'_{eq}/r	50,0	35,7	31,3	27,7	27,7	27,7	27,7

4.11.2.2 Taxa de amortecimento geométrico vertical para uma estaca isolada

A taxa de amortecimento geométrico D_z dependerá da velocidade de propagação das ondas de cisalhamento no solo (V_s), do coeficiente de mola (k_z) e da massa sustentada (m_c).

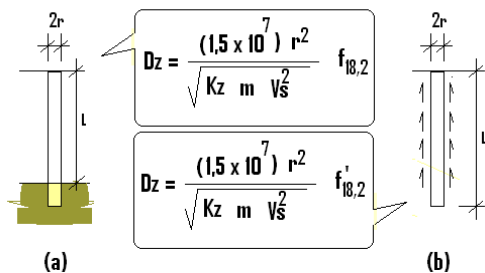
As velocidades de propagação poderão ser estimadas (supondo a densidade do solo como $\rho_s = 1800 \text{ kg/m}^3$):

Gs	V_s
200 kgf/cm ²	105 m/s
350 kgf/cm ²	140 m/s
500 kgf/cm ²	167 m/s

As estimativas de D_z terão a expressão :

$$[r] = m, [K_z] = \text{tf}/m$$

$$[m] = t, [V_s] = m/s$$



Onde os parâmetros $f_{18,2}$ e $f'_{18,2}$ podem ser calculados em função do comprimento L e do módulo de cisalhamento G_s do solo de acordo à tabela simplificada:

Gs		L/r						
		10	20	30	40	60	80	100
200 kgf/cm ²	$f_{18,2}$	0,005	0,010	0,015	0,020	0,027	0,031	0,034
	$f'_{18,2}$	0,020	0,030	0,038	0,043	0,043	0,040	0,038
350 kgf/cm ²	$f_{18,2}$	0,010	0,018	0,025	0,033	0,043	0,046	0,048
	$f'_{18,2}$	0,030	0,048	0,055	0,057	0,053	0,052	0,050
500 kgf/cm ²	$f_{18,2}$	0,015	0,027	0,038	0,047	0,057	0,060	0,062
	$f'_{18,2}$	0,045	0,063	0,068	0,065	0,063	0,062	0,062

4.11.2.3 Exemplo de aplicação

Uma base infinitamente rígida está apoiada sobre estacas de diâmetro 30 cm e 6 metros de comprimento, em solo argiloso cujo $G_s=350$ kgf/cm². Suponha que cada estaca receba 10 t de carga permanente em serviço.

A) Qual será a frequência natural de oscilação vertical.

B) Seja τ a fricção (neta) entre a estaca e o solo para a estaca de 30cm de diâmetro. Desejamos adotar uma solução com estacas de diâmetro 50 cm e 10 m de comprimento que trabalhem com o mesmo τ . Qual será a frequência para esta alternativa?

C) Calcular as frequências naturais se as estacas de 30 cm teriam um substrato rijo a uma profundidade de 6 metros.

D) Calcular as taxas de amortecimento para cada uma das alternativas

E) Analisar qual será o deslocamento vertical máximo e a velocidade máxima que se experimentará em cada um dos casos quando uma carga de amplitude 10 % do peso da base esteja sintonizado com a frequência natural da base.

$$A) G_s = 350 \text{ kgf/cm}^2, L/r = 6,00/0,15 = 40,$$

$$f_{18,1} = 0,027, \quad K_z = (9.4 \times 10^6) \times 0,15 \times 0,027 = 38070 \text{ tf/m}$$

$$\delta_{st} = 10 \text{ tf} / (38070 \text{ tf/m}) = 0.00026 \text{ m}$$

$$f_n = 1 / 2(0.00026^{0,5}) = 31 \text{ Hz}$$

$$B) \tau = 10 \text{ tf} / (6 \times 0,30 \times \pi \text{ m}^2) = 1,77 \text{ tf/m}^2$$

A carga sobre cada estaca resultará

$$N_s = 1,77 \times (10 \times 0,50 \times \pi) = 27,8 \text{ tf}$$

$$L/r = 10 / 0,25 = 40, \quad f_{18,1} = 0,027$$

$$K_z = (9.4 \times 10^6) \times 0,25 \times 0,027 = 63450 \text{ tf/m}$$

$$\delta_{st} = 27,8 \text{ tf} / (63450 \text{ tf/m}) = 0.00044 \text{ m}$$

$$f_n = 1 / 2(0.00044^{0,5}) = 23,8 \text{ Hz}$$

$$C) G_s = 350 \text{ kgf/cm}^2, L/r = 6,00/0,15 = 40,$$

$$f_{18,1} = 0,034, \quad K_z = (9.4 \times 10^6) \times 0,15 \times 0,034 = 47940 \text{ tf/m}$$

$$\delta_{st} = 10 \text{ tf} / (47940 \text{ tf/m}) = 0.00021 \text{ m}$$

$$f_n = 1 / 2(0.00021^{0,5}) = 34,5 \text{ Hz}$$

D)

Para as estacas de diâmetro 30 cm carregadas com 10 t resultará :

$$V_s = 140 \text{ m/s}$$

$$m = 10 \text{ t}$$

$$K_z = 38070 \text{ tf/m}$$

$$r = 0,15 \text{ m}$$

$$f_{18,2}^* = 0,057$$

$$\text{Ou seja: } D_z = 0,22$$

Para as estacas de diâmetro 50 cm carregadas com 27,8 t resultará :

$$V_s = 140 \text{ m/s}$$

$$m = 27,8 \text{ t}$$

$$K_z = 63450 \text{ tf/m}$$

$$r = 0,25 \text{ m}$$

$$f_{18,2}^* = 0,057$$

$$\text{Ou seja : } D_z = 0,29$$

No caso de estacas de 30 cm com substrato rijo resultará:

$$V_s = 140 \text{ m/s}$$

$$m = 10 \text{ t}$$

$$K_z = 47940 \text{ tf/m}$$

$$r = 0,15 \text{ m}$$

$$f_{18,2}^* = 0,033$$

$$\text{Ou seja: } D_z = 0,11$$

Observe-se que a taxa de amortecimento resultou bem menor.

E)

- Para as estacas de diâmetro 30 cm carregadas com 10 t resultará :

$$F_i = 1 \text{ tf}, \text{ O deslocamento estático resultará } 0,000026 \text{ m} = 0,026 \text{ mm}$$

$$\text{Amplificação em ressonância } M = 1/(2 D_z) = 2,27$$

$$\text{O deslocamento máximo será } \delta_{\max} = 2,27 \times 0,026 \text{ mm} = 0,059 \text{ mm}$$

A frequência de ressonância será $f = 31 \text{ Hz}$, com o qual a frequência angular em ressonância será 195 Rad/s . Daí que a velocidade máxima será:

$$V_{\max} = 11,5 \text{ mm/s}$$

- Para as estacas de diâmetro 50 cm carregadas com 27,8 t resultará :

$$F_i = 2,8 \text{ tf}, \text{ O deslocamento estático resultará } 0,000044 \text{ m} = 0,044 \text{ mm}$$

$$\text{Amplificação em ressonância } M = 1/(2 D_z) = 1,72$$

$$\text{O deslocamento máximo será } \delta_{\max} = 1,72 \times 0,044 \text{ mm} = 0,076 \text{ mm}$$

A frequência de ressonância será $f = 23,8$ Hz, com o qual a frequência angular em ressonância será 149 Rad/s . Daí que a velocidade máxima será:

$$V_{\max} = 11,3 \text{ mm/s}$$

- Para as estacas de diâmetro 30 cm com o substrato rijo a 6 metros :

$F_i = 1 \text{ tf}$, O deslocamento estático resultará $0,000021 \text{ m} = 0,021 \text{ mm}$

Amplificação em ressonância $M = 1/(2 D_z) = 4,54$

O deslocamento máximo será $\delta_{\max} = 4,54 \times 0,021 \text{ mm} = 0,095 \text{ mm}$

A frequência de ressonância será $f = 34,5$ Hz, com o qual a frequência angular em ressonância será 217 Rad/s . Daí que a velocidade máxima será:

$$V_{\max} = 20,5 \text{ mm/s}$$

Ou seja, a presença do estrato rijo resulta desfavorável ao desempenho da base.

4.11.3 Parâmetros de resposta para modos Horizontais

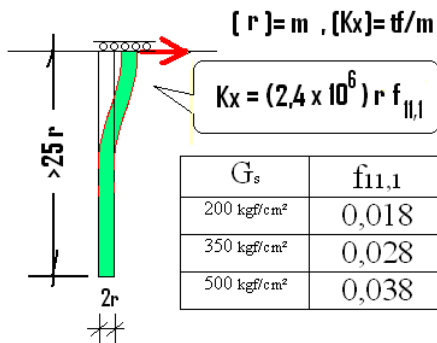
Considerando uma estaca isolada os parâmetros de resposta que devemos estimar para a análise serão :

k_x : coeficiente de mola horizontal

D_x : taxa de amortecimento geométrico horizontal

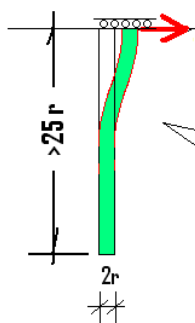
4.11.3.1 Determinação do coeficiente de mola horizontal para uma estaca isolada

Para estacas cujos topos estão impedidos de rotar, as estimativas de k_x terão a expressão :



4.11.3.2 Determinação da taxa de amortecimento geométrico horizontal para uma estaca isolada

Da mesma maneira que temos visto para oscilações verticais, a taxa de amortecimento geométrico dos modos horizontais D_x dependerá da velocidade de propagação das ondas de cisalhamento no solo (V_s), do coeficiente de mola (K_x) e da massa sustentada (m):



The diagram shows a pile of length $>25r$ and diameter $2r$ embedded in soil. A horizontal force is applied at the top, causing a lateral displacement. The soil is represented by a green shaded area.

$$[r] = m, [K_x] = tf/m$$

$$[m] = t, [V_s] = m/s$$

$$D_x = \frac{(3,7 \times 10^6) r^2}{\sqrt{K_x m V_s^2}} f_{11,2}$$

Supondo a densidade do solo como $\rho_s = 1800 \text{ kg/m}^3$:

G_s	V_s	$f_{11,2}$
200 kgf/cm ²	105 m/s	0,042
350 kgf/cm ²	140 m/s	0,066
500 kgf/cm ²	167 m/s	0,090

4.11.4 Efeitos de grupos de estacas

Os valores obtidos de K_x , K_z , D_x , e D_z seriam adequados para a análise do caso de uma única estaca.

Em geral será necessário o emprego de grupos de estacas. Isso implicará que existirá a necessidade de analisar os efeitos de grupo. Para isso poderá adotar-se a metodologia de Poulos.

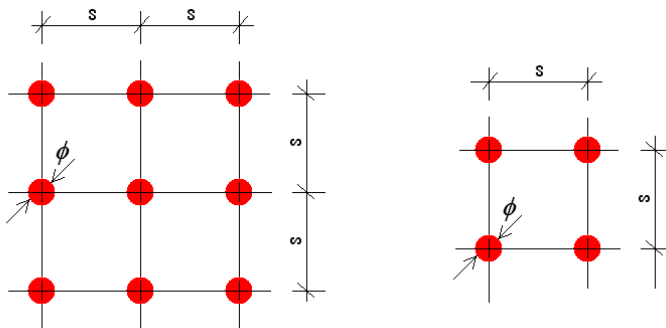
Os resultados implicarão uma flexibilidade muito maior do que resultaria de somar as participações das diferentes estacas. Ou seja, nos modelos deverá ser adotado um valor de coeficiente de mola individual reduzido tanto na horizontal como na vertical.

$$\begin{array}{llll} KG_{xi} = \mu_x & K_{xi} & \mu_x < 1 & \text{Horizontal} \\ KG_{yi} = \mu_y & K_{yi} & \mu_y < 1 & \text{Horizontal} \\ KG_{zi} = \mu_z & K_{zi} & \mu_z < 1 & \text{Vertical} \end{array}$$

Por outra parte o efeito grupal gerará uma taxa de amortecimento grupal maior que o que resultaria do valor da estaca isolada.

$$\begin{array}{llll} DG_x = \lambda_x & D_{xi} & \lambda_x > 1 & \text{Horizontal} \\ DG_y = \lambda_y & D_{yi} & \lambda_y > 1 & \text{Horizontal} \\ DG_z = \lambda_z & D_{zi} & \lambda_z > 1 & \text{Vertical} \end{array}$$

Consideraremos as configurações típicas de estacas equidistantes a uma distância s nas duas direções (distâncias iguais na direção x e y) :



Para estes casos pode se fazer um cálculo aproximado de acordo aos ajustes:

Para 4 estacas:

$$\begin{array}{lll} s=2\phi & \mu=0,30 & \lambda=1,08 \\ s=6\phi & \mu=0,40 & \lambda=1,28 \end{array}$$

Para 9 ou mais estacas:

$$\begin{array}{lll} s=2\phi & \mu=0,20 & \lambda=1,33 \\ s=6\phi & \mu=0,25 & \lambda=1,52 \end{array}$$

5 Efeitos dinâmicos gerados por atividades humanas

5.1 O ser humano como receptor de vibrações:

A estrutura do ser humano, como qualquer outra estrutura gerará uma resposta mecânica quando estiver submetido a excitações. Não existe uniformidade nas estruturas humanas devido às características anatômicas individuais e singulares de cada um de nós, além disso, um mesmo ser humano muda de “esquema estrutural” quando muda de posição (parado, sentado, etc).

Mesmo se duas pessoas tiverem a mesma resposta estrutural, a percepção das mesmas, regida pelos órgãos sensoriais não necessariamente resultaria a mesma. Mesmo se estiverem experimentando a mesma sensação, em cada um deles o grau de conforto poderá ser bem diferente. Essa subjetividade faz que existam divergências sobre quais são os limites de vibrações que deveriam ser adotados para garantir o grau de conforto para certa população de indivíduos em uma situação definida e exposta a certa excitação

A realização de pesquisas experimentais sobre níveis vibracionais aceitáveis de acordo ao conforto humano resulta muito comum hoje em dia tanto no Brasil como no resto do mundo. No marco dessas pesquisas os indivíduos submetidos a estímulos devem responder se estão percebendo e qualificar o nível de desconforto. Resulta claro que toda pesquisa dessa classe está contaminada pela falta de objetividade já que as qualificações dadas (pela natureza mesma do termo) não poderão ser nunca objetivas, a percepção de um indivíduo, participando na pesquisa é a de quem espera poder perceber para dar uma resposta e não aquela que sentiria, esse mesmo indivíduo, cotidianamente. E assim que a base mais confiável de dados se encontra nos registros de reclamações e não nas pesquisas experimentais.

No Anexo C, podem ser visualizados os valores que são assumidos geralmente como limites de aceitabilidade de níveis de vibrações. Na realidade, esses valores são em geral suficientemente conservativos já que procuram garantir que a maioria da população não experimentará desconforto se estiver submetido a esses níveis.

A faixa de frequências com potencial de afetar o conforto humano contemplada pelas normas é entre 1 Hz e 80 Hz.

Entre 1 Hz e 10 Hz o ser humano parece perceber maiormente as flutuações de acelerações, e para frequências maiores de 10 Hz o determinante é a velocidade. Isso se reflete nas gráficas das normas: ISSO 2631 e DIN 4150.

Nos casos de excitações originadas em atividades humanas, o ser humano é também o receptor que mais deve ser levado em conta já que geralmente os níveis de vibração ficam em faixas de frequência e amplitude para as quais o ser humano é sensível, as amplitudes são muito menores e podem por em perigo a integridade da estrutura. Em geral são os indivíduos que não fazem parte das atividades os “receptores” mais afetados.

5.2 Seres humanos como geradores de excitações

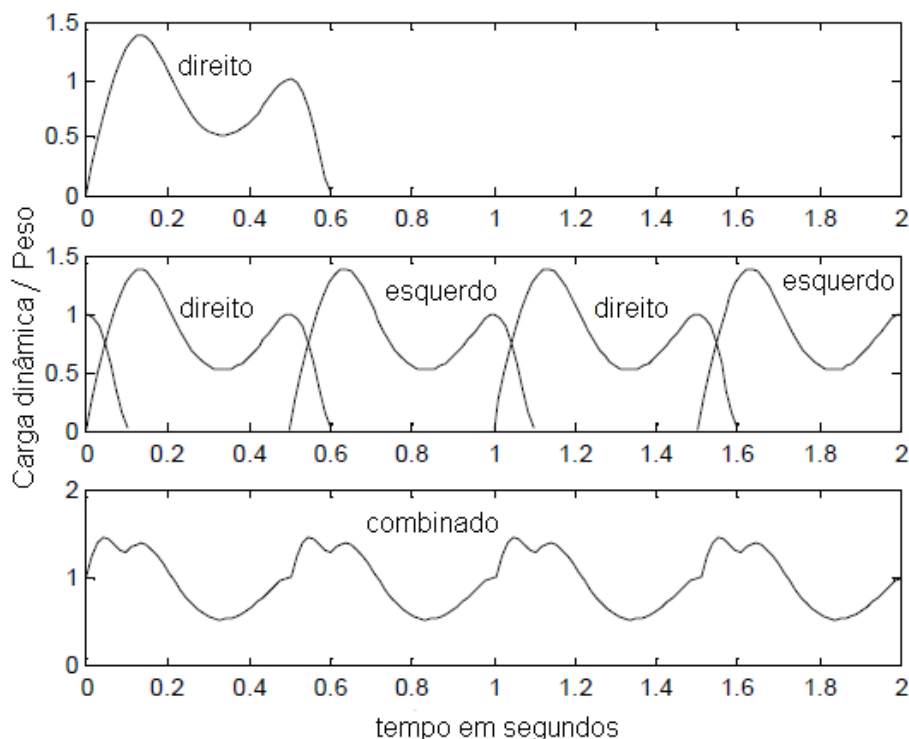
No anexo D está incluso um resumo dos parâmetros que permitem formular em nossos modelos estruturais diferentes tipos de excitações associadas a diferentes atividades humanas. Para estruturas de concreto armado em geral é recomendável assumir uma taxa de amortecimento 0,025.

Um dos problemas mais complexos envolvidos neste tópico é a estimativa da medida real na qual seres humanos podem sincronizar seus movimentos. Estima-se que a superposição de excitações devidas a “n” indivíduos é proporcional à raiz quadrada de n e não a n. Comprovou-se que se o grupo de indivíduos tiver que interromper a atividade e depois reiniciar a mesma conjuntamente, a sincronização atinge graus muito maiores de eficiência.

5.2.1 Excitação devida a pessoas caminhando

A maioria das pessoas caminham com frequência de 2 Hz (1 passo cada 0,5 segundos). Em casos excepcionais se atingem frequências de até 2,4 Hz. Ao caminhar o ser humano realiza movimentos impulsivos, e isso se reflexa nos coeficientes de Fourier dos harmônicos superiores (vide 5.2.5).

Estruturas com frequências naturais na faixa de 4 Hz a 6 Hz estão expostas claramente aos efeitos de ressonância dos harmônicos superiores.



Uma primeira maneira de evitar problemas vibracionais é fazer com que a estrutura tenha a frequência fundamental pelo menos por cima do alcance do 3º harmônico, ou seja, maior que três vezes a máxima frequência da caminhada: $3 \times 2,4$ Hz. Por isso lajes com frequência natural por cima de 7,5 Hz estariam salvaguardadas desses efeitos de ressonância. Na realidade, para estruturas com amortecimento relativamente alto será suficiente que a frequência esteja por cima dos 5 Hz (a contribuição do 3º harmônico já não seria relevante). A presença de elementos não estruturais pode contribuir em muito para incrementar o amortecimento. A resposta da estrutura depende também da quantidade de pessoas que estão excitando à mesma e da massa total inerte (incluindo a própria). Isso implica que a análise da resposta poderá dar níveis satisfatórios de resposta, mesmo para casos de baixa frequência da estrutura.

5.2.2 Excitação devida a atividades rítmicas

Baseando-nos em critérios similares aos empregados para pessoas caminhando teríamos que a frequência “segura” para uma estrutura (de Concreto Armado) que sustenta atividades esportivas seria também de 7,5 Hz e para dança 6,5 Hz. A grande diferença com o caso anterior resulta dos coeficientes de Fourier altos, e do fato que muitas vezes as atividades rítmicas reúnem um grande numero de pessoas com motivação e, às vezes, talento para coordenar movimentos.

5.2.3 Efeitos sobre passarelas.

Os problemas funcionais devidos a níveis altos de resposta acontecem em geral para passarelas de concreto armado de grandes vãos. Isso acontece devido às frequências fundamentais baixas e a que os vãos grandes propiciam a passagem de pessoas correndo o que implica que a frequência da excitação pode atingir a faixa dos 3,5 Hz.

A ausência de elementos não estruturais que contribuam ao amortecimento faz que o valor recomendável da taxa de amortecimento desça a 0,013.

Outra característica habitual das passarelas de grande vão é a alta flexibilidade transversal. Os modos associados ao deslocamento transversal, quando forem de frequências bem baixas estarão expostos à ressonância da excitação transversal dos pedestres (cuja frequência é metade da vertical, ou seja, um ciclo cada 2º passo).

Outro fator que afeta especialmente as passarelas é a involuntária sincronização que atinge a população que atravessa a mesma na hora de perceber os deslocamentos. Isso resulta da tendência (de cada individuo) a “acompanhar” o movimento da passarela. Esta “interação pedestre-passearela” levou à instabilidade da Ponte do Milênio de Londres. A partir disso formularam-se novas teorias sobre coordenação dos movimentos dos pedestres.

A limitação de aceleração vertical recomendável para passarelas é a adotada pela norma de Ontário:

$$a < 0,025 f_1^{0,78} g$$

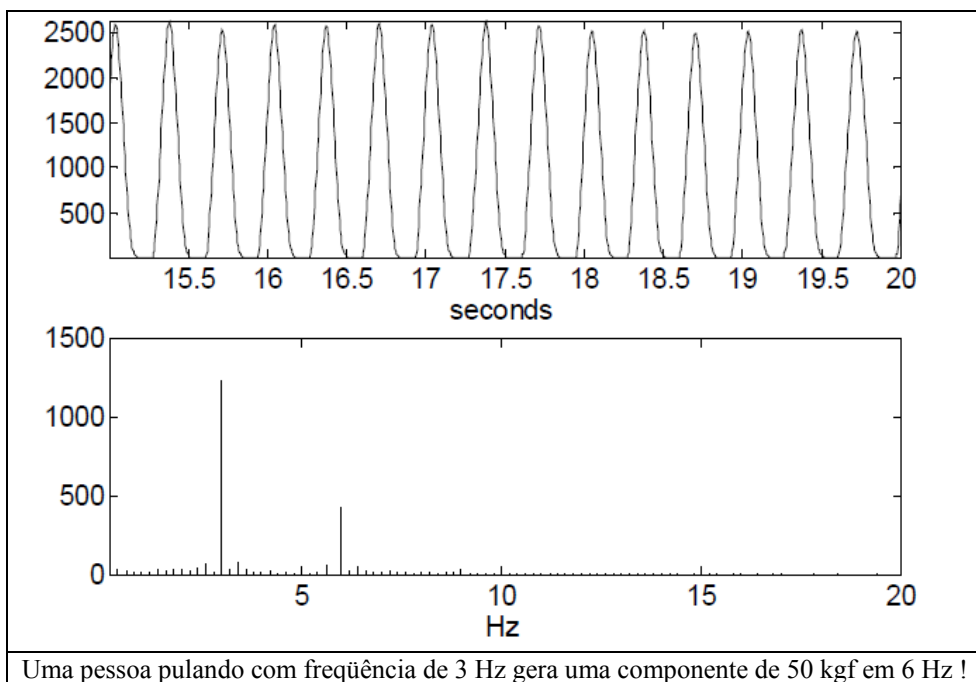
Onde f_1 é a frequência fundamental (vertical) da passarela.



A adoção de frequências altas para evitar ressonância resulta difícil de impor nos casos de passarelas devido aos vãos que devem ser relativamente grandes.

5.2.4 Pessoas pulando e Excitação gerada pela multidão em uma arquibancada

Pessoas pulando geram perturbações com componentes significativos até o 4º harmônico. Sendo f^* a frequência diretriz “fonte da motivação” da excitação (a frequência que os indivíduos tentam copiar), resultaram componentes harmônicos também em $2f^*$, $3f^*$, $4f^*$. A imperfeição na coordenação de um grupo que está pulando gera um EFEITO DE ATENUAÇÃO com respeito ao que seria a superposição dos efeitos individuais. Esse efeito de redução é especialmente significativo nas componentes de harmônicos superiores, e leva a que os efeitos dos harmônicos 3º e 4º sejam quase insignificantes. Na medida em que o grupo esteja especialmente motivado, com ritmo diretriz sustentado por música em alto volume e que convide a realizar movimentos impulsivos, os harmônicos superiores poderão virar mais energéticos.



Para eventos sem música o 1º harmônico será o dominante absoluto. Para eventos nos quais se canta, mas sem acompanhamento de instrumentos musicais o 1º harmônico será preponderante, mas poderia já se ter alguma influência do 2º. Para eventos nos quais a audiência canta com acompanhamento de instrumentos musicais, o 1º e 2º harmônico serão significantes.

Para eventos de musica POP ou Rock se atingem contribuições significativas no 3º harmônico, especialmente quando os movimentos da audiência são muito bem sincronizados. Isso acontece com populações jovens especialmente motivadas

De acordo ao documento: “Requerimentos de desempenho dinâmico para arquibancadas permanentes sujeitas a ações de multidões” (Reino Unido-Novembro 2001)” se estabeleceram as seguintes recomendações para o desenho estrutural :

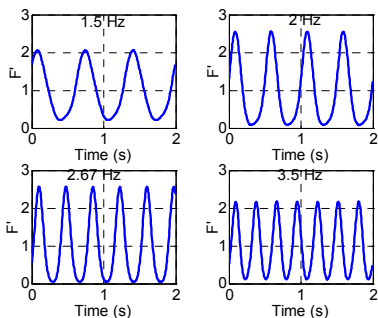
- A) Se a frequência fundamental de vibração da estrutura (sem carga de serviço) for menor que 3 Hz deverá se efetuar sempre uma análise detalhada.

- B) Se a frequência natural for maior que 3,5 Hz (sem incluir a carga viva como massa) a estrutura será apta para espetáculos esportivos sem musica incidental.
- C) Se a frequência natural for maior que 5,0 Hz (sem carga de serviço) a estrutura será apta para espetáculos esportivos com musica incidental.
- D) Se a frequência natural for maior que 6,0 Hz (sem carga de serviço) a estrutura será apta para todo tipo de eventos.
- E) Nos casos nos quais não se atinjam os valores recomendados de frequência natural mínima associados aos propósitos específicos será necessário efetuar uma análise detalhada.
- F) Se recomenda que a frequência natural horizontal seja maior que 3 Hz.
- G) É necessário desenhar a estrutura para uma força horizontal adicional de 7,5% da carga de serviço (viva) normativa para eventos de musica POP, e 5% para outros.(está última recomendação é relativa à estabilidade dos pórticos)

É importante destacar que é comum que as estruturas de arquibancadas com mais de um andar possuíam a frequências fundamentais abaixo dos 5 Hz (muitas vezes entre 2 e 4 Hz). Tentar levar as frequências a valores mais altos pode resultar impossível sem alterar a funcionalidade arquitetônica da mesma, e resulta necessário realizar uma analise detalhada para testar o desempenho nos eventos nos quais se produzem efeitos dinâmicos devido à multidão pulando de maneira sincronizada (quase sincronizada).

A norma BS 6399 (annex A) recomenda que seja considerada uma faixa de frequência de excitação vertical entre 1,5 Hz e 3,5 Hz para efeitos de “indivíduos” dançando ou pulando. Para grupos grandes a faixa se reduz a 1,5 Hz e 2,8 Hz devido à dificuldade de sincronização na coordenação grupal.

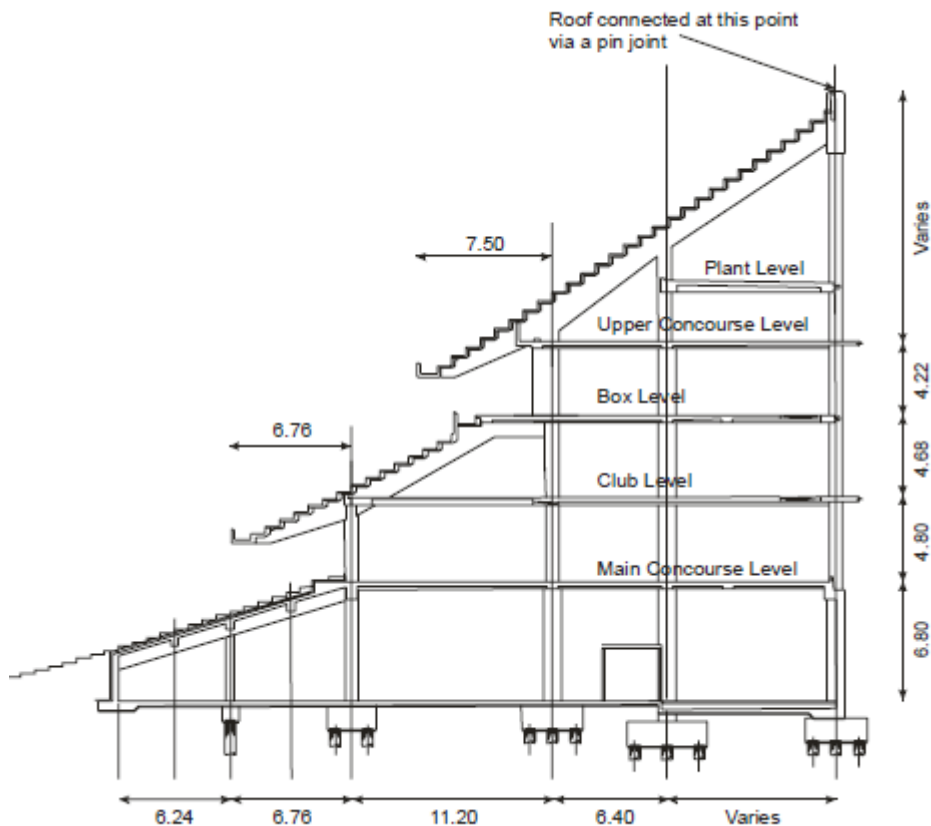
No marco de uma pesquisa realizada na Universidade de Oxford se calculou os coeficientes de Fourier da excitação gerada por indivíduos que pulavam sobre uma plataforma acompanhando o ritmo de peças de música com diferentes frequências. Na ilustração pode se ver os resultados obtidos.



Frequência da música diretriz	Coeficientes de Fourier		
	1º	2º	3º
1,50 Hz	0.911	0.150	0.034
2,00 Hz	1.193	0.337	0.040
2,67 Hz	1.228	0.311	0.032
3,50 Hz	1.020	0.157	0.008

Testes posteriores efetuados em situações reais levaram à conclusão que a avaliação de acordo a esses valores propiciam resultados exagerados, e que a resposta da estrutura aponta a excitações de níveis menores (especialmente dos harmônicos superiores). A conclusão foi que os participantes passivos (sempre tem quem não está tão motivado) alterariam a resposta da estrutura de maneira significativa. Ou seja, a “presença passiva” incrementa o amortecimento do sistema (as pessoas que ficam quietas atuariam como um “Tuned Mass Damper” já que se manifestou uma alteração da frequência de ressonância do sistema.

Uma fonte possível de valores de Coeficientes de Fourier (da perturbação) é a norma canadense. Nas normas canadenses se dão valores para “shows ao vivo com poltronas fixas”: $FC1=0,25$, e $FC2=0,05$.



Em Outubro de 2004 foi publicado um trabalho dirigido por B. R. Ellis e J.D. Litter: "Response of cantilever grandstands to crowd loads". O mesmo se baseou em medições efetuadas em balanços de arquibancadas (em diversos estádios ingleses) submetidos às cargas de multidões em diversos eventos de música ao vivo. O propósito das medições realizadas no marco desse trabalho era reformular os coeficientes de Fourier para que eles ajustassem melhor aos aspectos inerentes à atitude global da multidão:

$$\alpha_1 = 0.4200 \quad p^{-0,082}$$

$$\alpha_2 = 0.0870 \quad p^{-0,240}$$

$$\alpha_3 = 0.0170 \quad p^{-0,310}$$

$$\alpha_4 = 0.0160 \quad p^{-0,500}$$

p = “quantidade total de pessoas” que conformam a multidão cuja excitação está sendo avaliada. Aos efeitos da análise se supõem as fases como zero.

De acordo às normas canadenses é recomendado limitar a aceleração vertical em 0,04 g quando se procura um nível alto de conforto e até 0,07 g quando a exigência de conforto é menor. Adotar estes valores na limitação da aceleração “pico” de calculo é conservativa já que a sensação de desconforto estará ligada à valores rms.

5.2.5 Valores padronizados para a formulação da excitação gerada por atividades humanas por meio de superposição de excitações harmônicas .

Seja ω a frequência angular diretriz da atividade.

$\omega = 2\pi f$. Sendo f a frequência definida na tabela (activity rate)

q = carga devida ao peso das pessoas intervindo na atividade.

Seja W o peso médio assumido para um individuo da população que está realizando a atividade em questão. Resulta razoável estimar o peso médio de cada pessoa em $w = 700$ N (70 kgf), mas isso depende da população para a qual a análise é referida.

Sendo p a densidade de pessoas por metro quadrado, a carga pode ser dada como:

$$q = pw$$

A excitação por metro quadrado será:

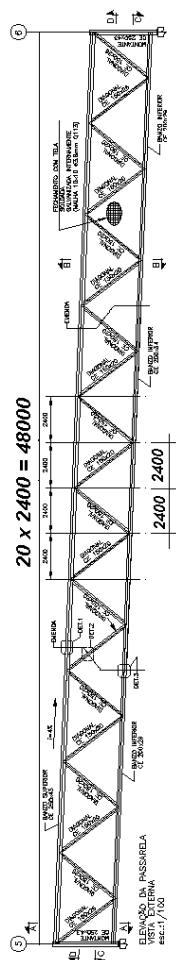
$$f(t) = q \{ \alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \cos(2\omega t + \phi_2) + \alpha_3 \cos(3\omega t + \phi_3) \}$$

Representative type of activity	Activity rate [Hz] f	Fourier coefficient and phase lag					Design density [persons/m ²] p
		α_1	α_2	ϕ_2	α_3	ϕ_3	
"walking"	vertical	2.0	0.4				~ 1
		2.4	0.5				
	forward	2.0	0.2				
"running"	lateral	2.0	$\alpha_{1/2} = 0.1$ $\alpha_{1/2} = 0.1$				-
		2.0 to 3.0	1.6		0.2		
"jumping"	normal	2.0	1.8				in fitness training ~ 0.25 (in extreme cases up to 0.5) *) $\phi_2 = \phi_3 = \pi(1 - f/p)$
		3.0	1.7				
	high	2.0	1.9				
		3.0	1.8				
"dancing"		2.0 to 3.0	0.5				~ 4 (in extreme cases up to 6)
"hand clapping with body bouncing while standing"		1.6	0.17				no fixed seating ~ 4 (in extreme cases up to ~ 6) with fixed seating ~ 2 to 3
		2.4	0.38				
"hand clapping"	normal	1.6	0.024				~ 2 to 3
		2.4	0.047				
	intensive	2.0	0.170				
"lateral body swaying"	seated	0.6	$\alpha_{1/2} = 0.4$				~ 3 to 4
	standing	0.6	$\alpha_{1/2} = 0.5$				

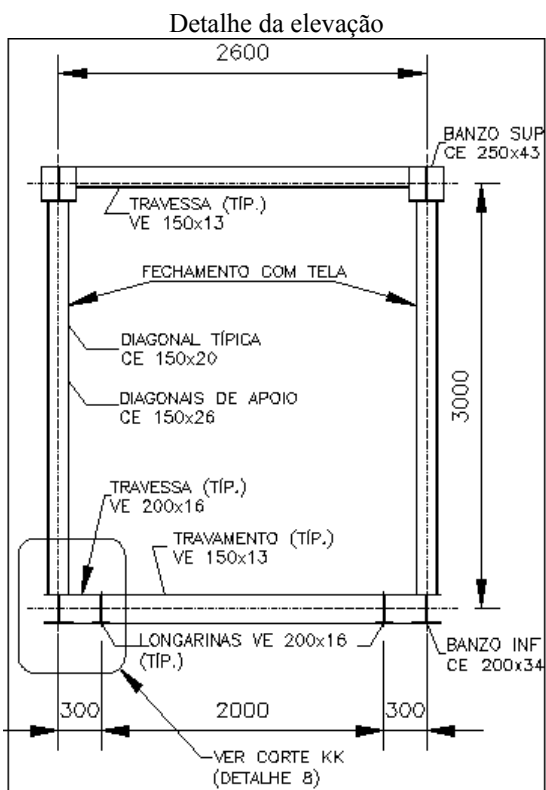
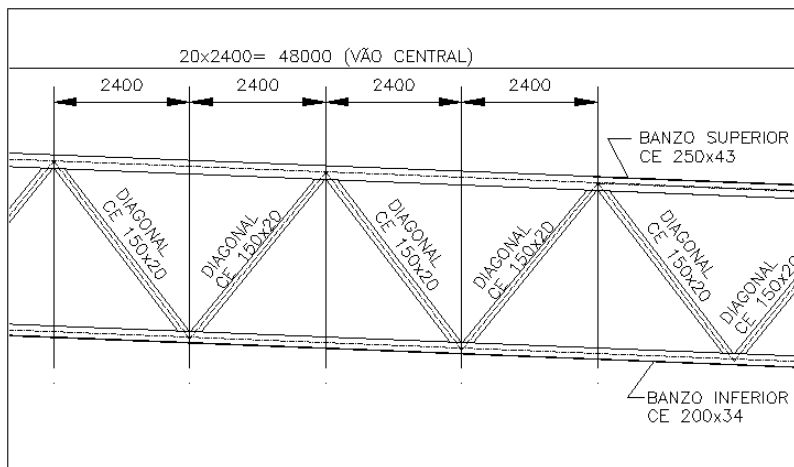
Table G.2: Normalized dynamic forces assigned to the representative types of activity defined in Table G.1

5.3 Exemplo de avaliação vibracional analítica de uma passarela para pedestres.

A passarela de pedestres deste exemplo é uma estrutura com vão de 48 metros. Trata-se de uma tipologia estrutural muito habitual implantada sobre rodovias. É uma estrutura de tipo “box “ com treliças de perfis eletro- soldados nas quatro faces do caixão, e capeamento de concreto do tabuleiro.



Elevação



Corte B-B típico da estrutura metálica



Detalhe de capeamento do tabuleiro

O peso próprio total da estrutura é : 45, 4 tf . Peso próprio Estrutura metálica: 14,6 tf .Peso próprio Concreto: 30,8 tf .

Aos efeitos de um cálculo aproximado consideremos uma massa suplementar de 110 kgf/m² (entre 1,37 e 1,57 pessoas por metro quadrado, ou um total de entre 150 a 170 pessoas na passarela).

Se submetemos o modelo à carga total se chegaria a uma deflexão vertical no centro do vão de: 6,74 cm = 67,4 mm

A partir da fórmula de Rayleigh pode se chegar a que a frequência natural f em Hz resultará aproximadamente igual a:

$$f \approx \frac{18}{\sqrt{\frac{\text{deslocamento}}{\text{devido ao peso}} \sqrt{\text{próprio em mm}}}}$$

Ou seja, que a estimativa de acordo a Rayleigh resultaria: 2,19 Hz.

Fazendo a análise modal chegamos a que essa frequência calculada detalhadamente é: 2,13 Hz. Resulta importante ver que a aproximação de Rayleigh fornece resulta bastante boa e sempre por excesso. Resulta sempre importante testar a consistência dos modelos detalhados mediante fórmulas aproximadas.

Resulta discutível “quanta massa” da sobrecarga deveria ser levada em conta. A massa a ser levada em conta deve se limitar à massa que se movimenta “solidariamente” com a estrutura. Os pedestres na realidade não são massa “grudada” ao tabuleiro. Poderia se descrever a interação pedestre-estrutura como a de “apêndices” flexíveis da passarela, vinculados à mesma por meio de molas e amortecedores.

Sendo que a massa associada aos 110 kgf/m² constituem um total de 12 t e a massa permanente é de 45,4 t, a frequência natural das oscilações verticais estará na faixa:

$$f_{\min} = f_{\max} \sqrt{\frac{45,4}{45,4 + 12,0}} < f < f_{\max}$$

$$1,89\text{Hz} < f < 2,13\text{Hz}$$

O modo de oscilação horizontal resulta ser de menor frequência que o vertical: 2,05 Hz.

Passarelas de grandes vãos propiciam a passagem de pessoas correndo, por isso a frequência da excitação pode atingir a faixa dos 3,5 Hz.

Nem sempre essa frequência será a frequência crítica quando a frequência natural da passarela for especialmente baixa como no nosso caso.

Levando em conta a ausência de elementos não estruturais que contribuam ao amortecimento, mas considerando a contribuição do tabuleiro de concreto ao amortecimento, o valor recomendável da taxa de amortecimento será assumido aos efeitos do cálculo em $\zeta=0,006$ (0,6%).

Como foi explicado, tem se comprovado a involuntária sincronização da população que atravessa uma passarela flexível na hora de perceber os deslocamentos. Isso resulta da tendência (de cada indivíduo) a “acompanhar” o movimento da passarela, cuja consequência é a acentuação das respostas estruturais.

A limitação de aceleração vertical recomendável para passarelas é a adotada pela norma britânica BS 5400:

$$a < 0,5 f_1^{0,50}$$

Onde f_1 é a frequência fundamental (vertical) da passarela, e a é a aceleração em metros por segundo ao quadrado.

As diversas normas dão valores que flutuam em suas acelerações pico ao redor dos 0,6 metros por segundo ao quadrado para frequências naturais fundamentais na faixa dos 2 Hz.

Seja ω a frequência angular diretriz da atividade.

$\omega = 2\pi f$, onde f a frequência definida na tabela (activity rate)

q = carga devida ao peso das pessoas intervindo na atividade.

W o peso médio assumido para um individuo da população que está realizando a atividade em questão. Resulta razoável estimar o peso médio de cada pessoa em $w = 750$ N (75 kgf), mas isso depende da população para a qual a análise é referida.

Sendo p a densidade de pessoas por metro quadrado, a carga pode ser dada como:

$$q = pw.$$

A excitação por metro quadrado será:

$$f(t) = q\{\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \cos(2\omega t + \phi_2) + \alpha_3 \cos(3\omega t + \phi_3)\}$$

Representative type of activity	Activity rate [Hz] f		Fourier coefficient and phase lag					Design density [persons/m ²] p
			α_1	α_2	ϕ_2	α_3	ϕ_3	
"walking"	vertical	2.0	0.4	0.1	$\pi/2$	0.1	$\pi/2$	~ 1
		2.4	0.5					
	forward	2.0	0.2	0.1				
		2.0	$\alpha_{1/2} = 0.1$ $\alpha_{1/2} = 0.1$	$\alpha_{3/2} = 0.1$				
"running"	lateral	2.0						-
		2.0 to 3.0	1.6	0.7		0.2		
"jumping"	normal	2.0	1.8	1.3	*)	0.7	*)	in fitness training ~ 0.25 (in extreme cases up to 0.5)
		3.0	1.7	1.1	*)	0.5	*)	
	high	2.0	1.9	1.6	*)	1.1	*)	
		3.0	1.8	1.3	*)	0.8	*)	

Como pode se ver a passarela está exposta a ressonância já que a frequência natural resulta na faixa da excitação de pedestres.

Do cálculo estático se desprende que a deflexão estática no centro do tabuleiro para o estado de carga associado a 110 kgf/m² (entre 1,37 e 1,57 pessoas por metro quadrado, ou um total de entre 150 a 170 pessoas na passarela) seria : $\delta_{est,110} = 1,67$ cm = 16,7 mm

Se associarmos a esse carregamento uma flutuação senoidal de frequência coincidente com a frequência natural vertical fundamental (2,13 Hz), resultaria em uma amplificação:

$$M = \frac{1}{2 \text{ VEZES A TAXA DE AMORTECIMENTO}} = \frac{1}{2 \times 0,006} = 83$$

A frequência angular associada a 2,13 Hz será :

$$\omega = 2\pi f = 13,37 \text{ Rad} / s$$

Sendo que o coeficiente de Fourier do primeiro harmônico resulta 0,4, a aceleração vertical estimada de acordo ao 1º harmônico será:

$$a = 0,4 * 83 * (13,37)^2 * 0,0167 = 99 \text{ m} / s^2$$

A aceitabilidade da resposta de aceleração pico ponderada de acordo à norma britânica será:

$$a < 0,5 f_1^{0,50} = 0,72 \text{ m} / s^2$$

Isso significaria que a limitação de carga de pessoas andando sincronicamente na frequência natural será a associada a :

$$(0,72 / 99) \times 110 \text{ kg/m}^2 = 0,80 \text{ kg/m}^2$$

Ou seja, mais de uma pessoa andando sincronizada com a passarela já resultaria em aceleração inaceitável.

Se a sincronização fosse de um 5% por excesso respeito à 2,13 Hz, ou seja para 2,23 Hz, a amplificação seria aproximadamente de 20 vezes e não 83 vezes.

Nesse caso a aceleração chegaria a:

$$0,4 * 20 * (14,04)^2 * 0,0167 = 26 \text{ m} / s^2$$

Nesse caso se atingiria o limite de aceitabilidade para uma carga:

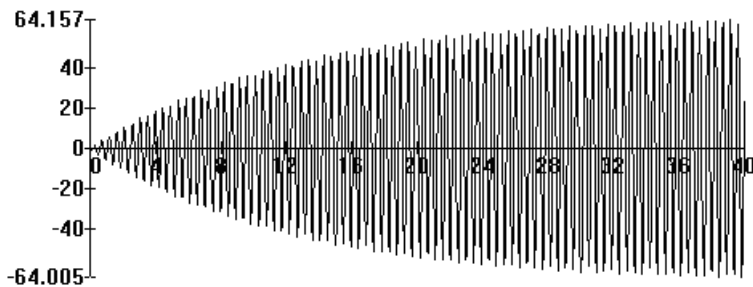
$$(0,72 / 26) \times 110 \text{ kgf/m}^2 = 3,05 \text{ kgf/m}^2$$

Ou seja, mesmo que suponhamos que não se atinja uma sincronização menor que 5%, 4 pessoas andando sincronizada (com 5 % por excesso da ressonância com a passarela) já resultaria em aceleração inaceitável.

De acordo a esta análise preliminar a passarela resulta inaceitável

Deve ser ressaltado que a bibliografia estima para caminhada uma densidade de 1 pessoa cada metro quadrado. Isso significará uma população de 110 pessoas atravessando a passarela caminhando com passo sincronizado de 2,13 Hz.

A historia da resposta de acelerações verticais no centro do vão para a excitação padronizada incluindo os três harmônicos chegaremos com de acordo a 75 kgf/m² :



Com o qual para 75 kg /m² a aceleração resulta: 64 m/s²

Para não ultrapassar 0,72 m/s² se teria que a carga deveria ser:

$(0,72/64) \times 75 = 0,84 \text{ kg /m}^2$, ou seja, coerente com o cálculo aproximado.

Observe-se que para diminuir a frequência natural até 1,8 Hz deveria se incrementar a massa total em aproximadamente 40 % (a frequência é inversamente proporcional à raiz quadrada da massa). Ou seja, que o incremento de massa seria:

$0,4 \times 50,2 = 20t$ (seria incrementar em 7 cm a espessura do tabuleiro de concreto)

Se isso se fizer sem incrementar a rigidez resultaria para uma excitação em 2 Hz um coeficiente de amplificação de 4,3.

A deformação associada a 75 kg/m² seria de 11 mm = 0,011 m

A velocidade angular associada a 2Hz é $\omega = 12,56 \text{ Rad/s}$.

A aceleração resultante seria: $4,3 \times 1,735 \text{ m/s}^2 = 7,46 \text{ m/s}^2$

A aceleração admissível para $f = 1,8 \text{ Hz}$ será 0,67 m/s²

Daí que o peso das pessoas sincronizadas que não gerem acelerações maiores que $0,67 \text{ m/s}^2$ será $75 \times (0,67/7,46) = 6,74 \text{ kg/m}^2$. Ou seja, um total de não mais que 10 pessoas!!!

Acontece que incrementar a massa em 40% sem incrementar a rigidez resulta impossível sem comprometer a estabilidade quando a estrutura não estiver sobre-dimensionada. O reforço necessário para sustentar o incremento de massa, levaria ao incremento da rigidez, e dissiparia a diminuição na frequência. (Como temos visto anteriormente, geralmente quando se está na faixa de ressonância não resulta eficiente incrementar a massa).

Para poder atingir uma frequência de 3 Hz deveria diminuir a massa em 30% ou seja em 15 t. Para isso o tabuleiro deveria pesar a metade (aproximadamente 135 kg/m^2)!!! Veja-se que renunciando ao tabuleiro de concreto e projetando um tabuleiro metálico poderíamos diminuir a muito menos que isso com o qual estaríamos nos afastando muito eficientemente da faixa de ressonância.

As alternativas suplementares possíveis são incrementar a rigidez ou implementar um sistema de controle vibracional modulando o amortecimento. Lembre-se que a eficiência de mexer com o amortecimento propicia soluções muito eficientes quando se está em casos de ressonância como o nosso.

A implementação de “amortecedores de massa sincronizada” (Tuned Mass Dampers) pode ser uma maneira muito eficiente. Para isso teremos que conceber o TMD arquitetonicamente e pré-dimensionar ele e finalmente, depois de construir a passarela, medir as frequências próprias reais, e assim ajustar o dimensionamento do TMD. Boa solução, eficiente também, mas nem sempre economicamente atrativa.

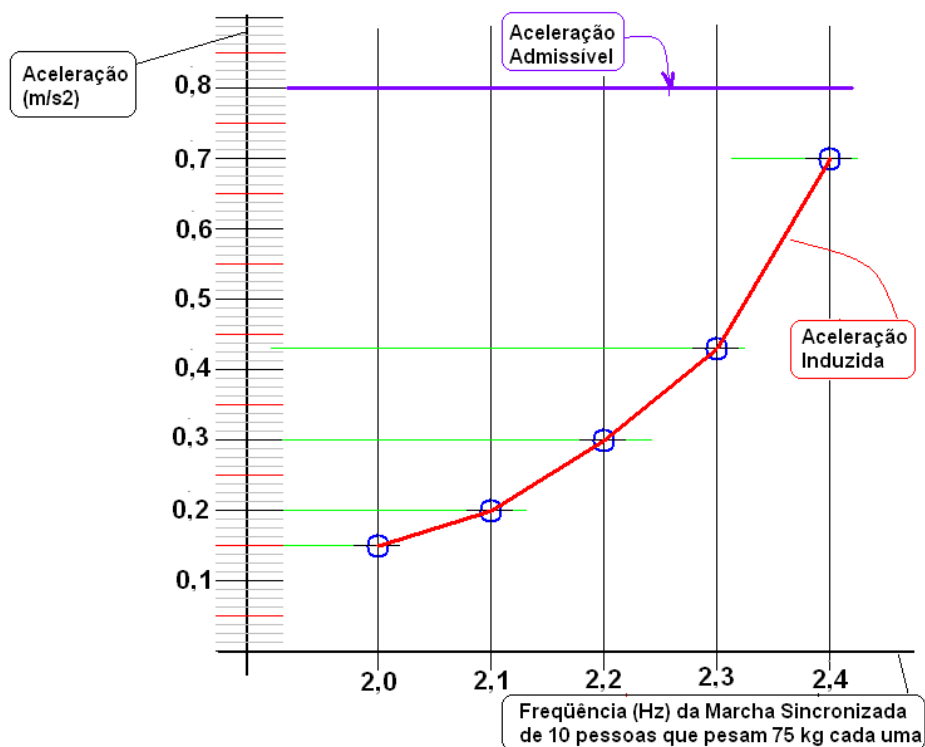
O alcance da solução mediante incremento de rigidez (mais inércia) pode melhorar a situação em muito, mas isso exige a incorporação de seção adicional significativa nos banzos e/ou mudar significativamente a altura das treliças verticais. Se a estrutura metálica já estiver fabricada daria somente para mexer com a seção dos banzos (mediante soldadura de chapas, por exemplo).

Se agregarmos reforços com chapas **300x16** (2 chapas em cada perfil do banzo superior) nos 30 metros centrais, a frequência natural vertical fundamental atingiria os 2,55 Hz. Para marchas de 2,0 Hz a aceleração admissível seria atingida para a ação de 53 pessoas sincronizadas. Para marchas de 2,1 Hz a mesma seria atingida para a ação de 40 pessoas sincronizadas. Para marchas de 2,2 Hz seria atingida para a ação de 26 pessoas sincronizadas. Para marchas de 2,3 Hz seria atingida para a ação de 19 pessoas

sincronizadas. Para marchas de 2,4 Hz a aceleração admissível seria atingida para a ação de 12 pessoas sincronizadas.

Sem duvida, com isso se melhora bastante o desempenho, mas não o suficiente para atingir padrões mais exigentes e ficando ainda a passarela exposta a fenômenos acentuados de ressonância em casos de passagens de pedestres correndo.

Espectro de Acelerações de Resposta da passarela em função da frequência de Marcha Sincronizada de 10 pedestres:



5.4 Exemplo de avaliação funcional simplificada de alternativas para uma laje

No desenvolvimento de certo projeto existem duas alternativas para uma laje de 340 metros quadrados: confeccionar com 35 cm de espessura com armadura passiva ou implementar o prós-tendido e reduzir a espessura a 30 cm.

5.4.1 Na avaliação se levarão em conta efeitos de pessoas caminhando e de pessoas pulando.

A carga suplementar permanente é de 200 kgf /m² (revestimento). Mesmo se no cálculo estático foi considerada uma sobrecarga de 300 kgf /m², aos efeitos da análise dinâmica a massa deve ser tomada de acordo à massa real associada à avaliação.

Dai que a massa considerada aos efeitos do modelo serão de acordo a 1 pessoa por metro quadrado que assumiremos como 80 kg/m².

Para a espessura de 35 cm a massa funcional será: 875+200+80= 1155 kg/m²

Do output do modelo resulta que a frequência fundamental é de 6,27 Hz.

Um dado muito útil é obter do modelo também a deflexão associada ao peso associado à massa funcional, que para 35 cm resulta de 9,72 mm.

Se a espessura for de 30 cm a massa funcional seria: 750+200+80= 1030 kg/m², a frequência fundamental 5,35 Hz e a deflexão associada ao peso associado à massa funcional 13,30 mm

Assumiremos que o amortecimento é de 1% e lembremos que a amplificação tem a expressão:

$$\boxed{\text{Fator de amplificação}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

5.4.1.1 Avaliação para efeitos de pessoas caminhando sobre a laje:

Sendo que nos dois casos a frequência é maior que 4,8 Hz, nos 2 casos somente pode entrar em ressonância no 3º harmônico devido aos efeitos de caminhada

Para $d=35$ resultará que a caminhada crítica se dará quando o 3º harmônico da caminhada coincida com a frequência natural. Daí que a amplitude da excitação nos diferentes harmônicos será:

1º Harmônico 2,09Hz : amplitude $F=0,4 \times 80 = 32 \text{ kgf/m}^2$

2º Harmônico 4,18Hz : amplitude $F=0,1 \times 80 = 8 \text{ kgf/m}^2$

3º Harmônico 6,27Hz : amplitude $F=0,1 \times 80 = 8 \text{ kgf/m}^2$

As amplificações:

1º Harmônico $r=0,33$ $M=1,122$

2º Harmônico $r=0,67$ $M=1,801$

3º Harmônico $r=1$ $M=50,00$

Os deslocamentos associados aos harmônicos:

1º Harmônico $(32: 1155) \times (9,72 \text{ mm}) \times 1,122 = 0,27 \text{ mm}$

2º Harmônico $(8: 1155) \times (9,72 \text{ mm}) \times 1,801 = 0,12 \text{ mm}$

3º Harmônico $(8: 1155) \times (9,72 \text{ mm}) \times 50 = 3,36 \text{ mm}$

Deslocamento médio estatístico: 3,38 mm

Aceleração estimada para $f=2,09 \text{ Hz}$: $(2\pi f)^2 \times 0,00338 = 0,58 \text{ m/s}^2 = 5,8 \% g$

Da mesma maneira a caminhada crítica para $d=30$ será de acordo a:

1º Harmônico 1,78 Hz : amplitude $F=0,4 \times 80 = 32 \text{ kgf/m}^2$

2º Harmônico 3,56 Hz : amplitude $F=0,1 \times 80 = 8 \text{ kgf/m}^2$

3º Harmônico 5,35 Hz : amplitude $F=0,1 \times 80 = 8 \text{ kgf/m}^2$

Amplificações:

1º Harmônico $r=0,33$ $M=1,12$

2º Harmônico $r=0,67$ $M=1,80$

3º Harmônico $r=1$ $M=50,00$

Deslocamentos associados aos harmônicos:

1º Harmônico (32: 1030)x(13,30 mm) x1,122= 0,41 mm

2º Harmônico (8: 1030)x(13,30 mm) x1,801= 0,19 mm

3º Harmônico (8: 1030)x(13,30 mm) x50= 5,17 mm

Deslocamento médio estatístico : 5,19 mm

Aceleração estimada para $f=1,78$ Hz: $(2\pi f)^2 * 0,00519 = 0,65 \text{ m/s}^2 = 6,5 \% g$

5.4.1.2 Avaliação para efeitos de pessoas pulando sobre a laje:

Neste caso a concentração será considerada de 1 pessoa cada 4 metros quadrados.

Considerando que as pessoas não conseguem coordenar por cima dos 3 Hz, para $d=35$ o estado crítico será quando a frequência associada ao 3º harmônico coincida com a frequência natural da laje:

1º Harmônico 2,09Hz : amplitude $F=1,8 \times 20 = 36 \text{ kgf/m}^2$

2º Harmônico 4,18Hz : amplitude $F=1,3 \times 20 = 26 \text{ kgf/m}^2$

3º Harmônico 6,27Hz : amplitude $F=0,7 \times 20 = 14 \text{ kgf/m}^2$

Amplificações:

1º Harmônico $r=0,33$ $M=1,122$

2º Harmônico $r=0,67$ $M=1,801$

3º Harmônico $r=1$ $M=50,00$

Deslocamentos associados aos harmônicos:

1º Harmônico (36: 1155)x(9,72 mm) x1,122= 0,30 mm

2º Harmônico (26: 1155)x(9,72 mm) x1,801= 0,22 mm

3º Harmônico (14: 1155)x(9,72 mm) x50= 5,90 mm

Deslocamento médio estatístico : 5,91 mm

Aceleração estimada para $f=2,09$ Hz: $(2\pi f)^2 * 0,00591 = 1,02 \text{ m/s}^2 = 10,2 \% g$

Para $d=30$ a frequência natural resulta menor que 6 Hz. Ou seja, a frequência diretriz crítica se dará quando o 2º harmônico coincida com a frequência natural da laje. Daí que os parâmetros ficariam:

1º Harmônico 2,77 Hz: amplitude $F=1,7 \times 20= 34 \text{ kgf/m}^2$

2º Harmônico 5,35 Hz : amplitude $F=1.1 \times 20= 22 \text{ kgf/m}^2$

3º Harmônico 8,31 Hz : amplitude $F=0,5 \times 20= 10 \text{ kgf/m}^2$

Amplificações:

1º Harmônico $r= 0,50 \quad M=1,33$

2º Harmônico $r= 1 \quad M=50,00$

3º Harmônico $r= 2 \quad M=0,33$

Deslocamentos associados aos harmônicos:

1º Harmônico $(34: 1030) \times (13,30 \text{ mm}) \times 1,33= 0,58 \text{ mm}$

2º Harmônico $(22: 1030) \times (13,30 \text{ mm}) \times 50= 14,20 \text{ mm}$

3º Harmônico $(10: 1030) \times (13,30 \text{ mm}) \times 0,33= 0,04 \text{ mm}$

Deslocamento médio estatístico : 14,20 mm

Aceleração estimada para $f=2,77 \text{ Hz}$: $(2\pi f)^2 * 0,0142= 4,30 \text{ m/s}^2 = \underline{43 \% \text{ g !!!}}$

A concentração padrão de 1 pessoa por metro quadrado para uma laje de 340 m² significariam um total de 85 pessoas. Essas 85 pessoas gerariam acelerações de até 10,2%g na laje de 35 cm e acelerações de 43 %g na laje de 30 cm.

Daí que para limitar a 6,5 % g a aceleração com pessoas pulando, a população máxima pode ser estimada em 54 pessoas na laje de 35 cm e de 13 pessoas na laje de 30 cm.

Nos dois casos a vibração gerada pela caminhada de pessoas resultará tolerável.

O critério de projeto de acordo a alvos de desempenho deverá levar em conta a expectativa que a população sobre a laje possa superar estas quantidades de pessoas em eventos nos quais as pessoas pulem de maneira sincronizada ao ritmo da música.

6 Efeitos dinâmicos induzidos pelo vento

6.1 Introdução

A missão do engenheiro de estruturas se concentra em analisar os aspectos ligados diretamente ao comportamento da estrutura e a resposta estrutural. Baseando-se nos resultados da análise, o engenheiro pode dimensionar e julgar se o desempenho da estrutura é adequado ou não. Na maioria das vezes as dificuldades surgem do fato que a formulação da excitação apresenta dificuldades singulares. É justamente na interface entre a fonte e a estrutura onde o engenheiro de estruturas terá mais dificuldades, especialmente quando resulta impossível definir a excitação de maneira determinista.

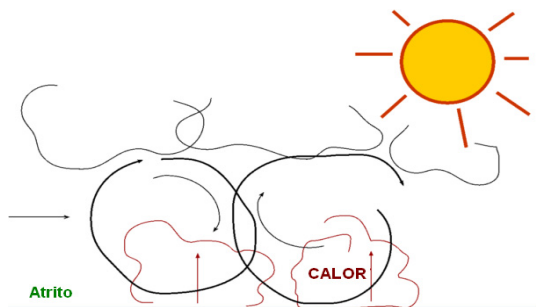
O estudo e análise dos efeitos originados pelo vento envolvem um nível de dificuldade especial devido à complexidade dos fenômenos associados à geração da excitação. Esses fenômenos são parte de problemas muito complexos da mecânica dos fluidos e fogem do escopo da disciplina do engenheiro de estruturas, ou do que o engenheiro de estruturas pode definir como parte da sua área de ação.

Certamente o engenheiro civil pode abordar problemas de vibrações originadas em equipamentos mecânicos e também em efeitos humanos sem ter que aprofundar em detalhes da mecânica dos equipamentos nem na fisiologia e anatomia humana. Isso devido a que, com maior ou menor exatidão poderá ser definida a “função excitação” de maneira determinista.

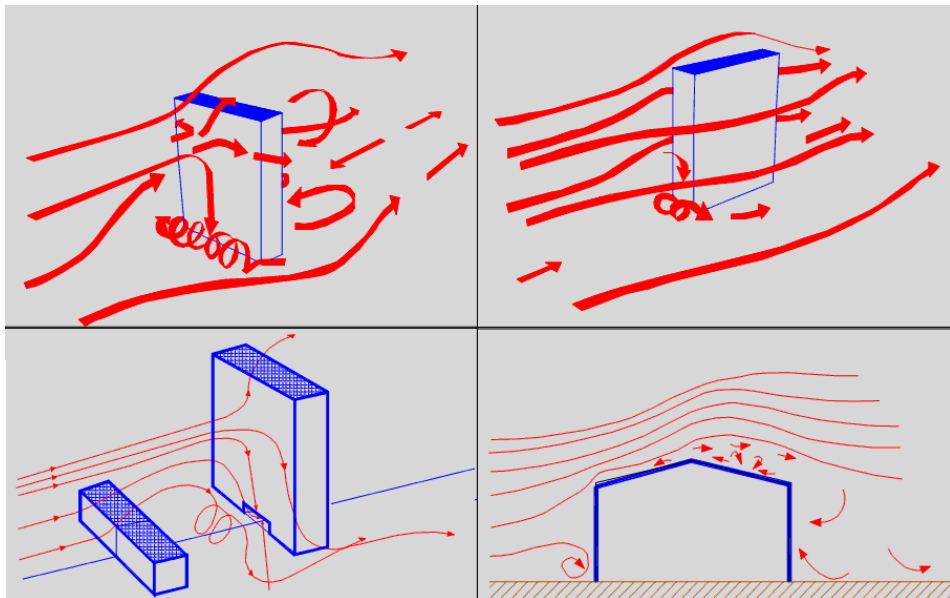
No caso do vento a situação é bem diferente devido à complexa estrutura e comportamento da fonte.

6.2 Natureza da fonte de excitação

Quando o ar aquece sobe e é substituído por massas de ar mais frio. O fato da movimentação do ar gera o vento cujo fluxo estará condicionado também pela presença de obstáculos e de atrito com o solo.



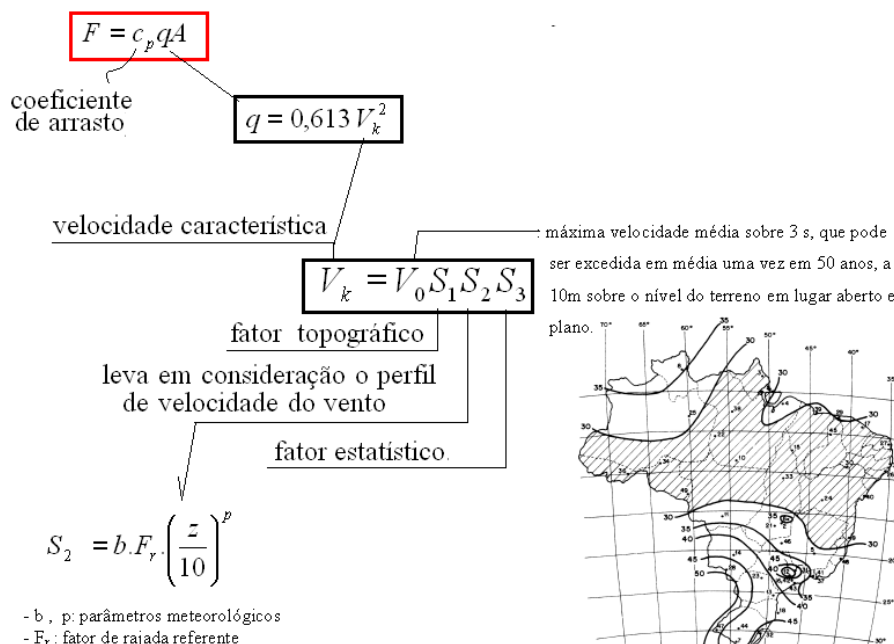
O encontro do vento com a estrutura muda a trajetória do fluxo.



Como resultado desse encontro, o vento gerará forças sobre a estrutura.

6.3 Forças estáticas equivalentes

Para casos habituais o engenheiro de estruturas recorre à norma NBR 6123 e determina as “forças estáticas equivalentes” em função de parâmetros meteorológicos.

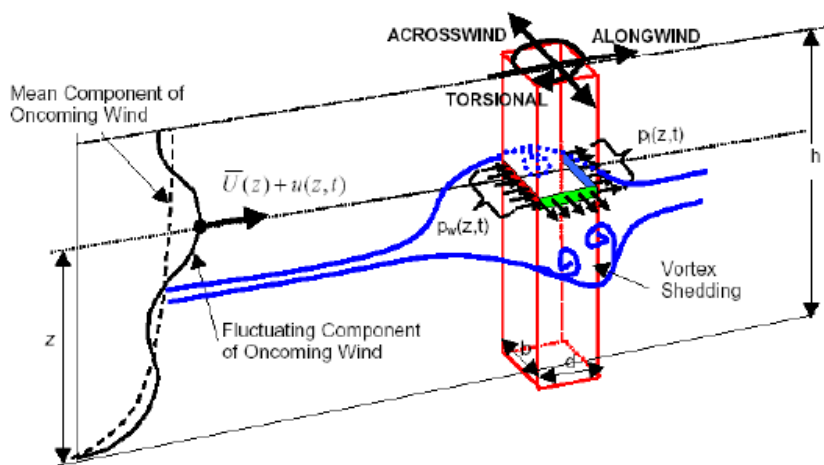


Esta metodologia leva em conta os efeitos da pressão do vento como estáticos

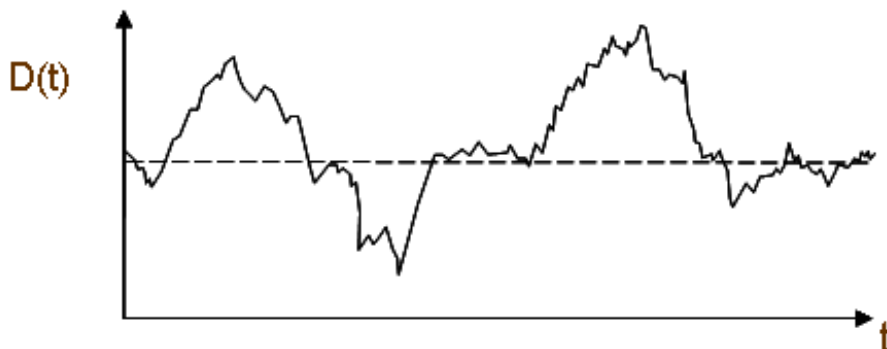
6.4 Efeitos dinâmicos devidos à turbulência atmosférica (efeitos de rajadas)

O vento conserva sua velocidade média por intervalos de mais de 10 minutos, com o qual pode se dizer que essa velocidade média gera efeitos puramente estáticos.

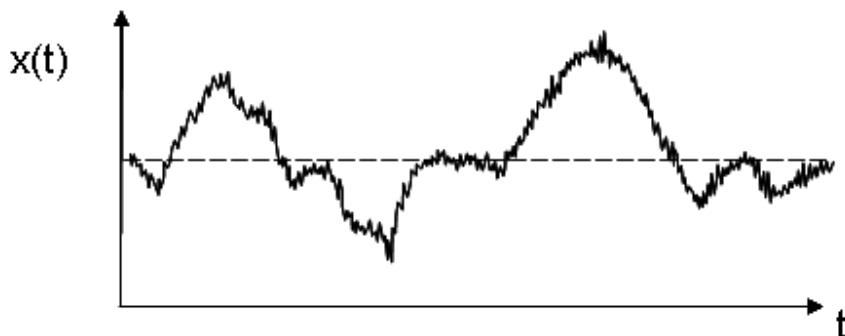
As flutuações da velocidade do vento (rajadas) em períodos curtos são pequenas respeito à velocidade média. As frequências dessas flutuações são bem mais altas que as da velocidade média, mas não o suficientemente altas para gerar efeitos relevantes em estruturas baixas (com frequências próprias altas). As frequências das rajadas podem ficar em faixas de frequência suficientemente altas como para gerar efeitos de sintonização (ressonância) em estruturas com frequências próprias baixas (estruturas esbeltas).



Supondo que o “Time history” da Força exercida pelo vento seja:

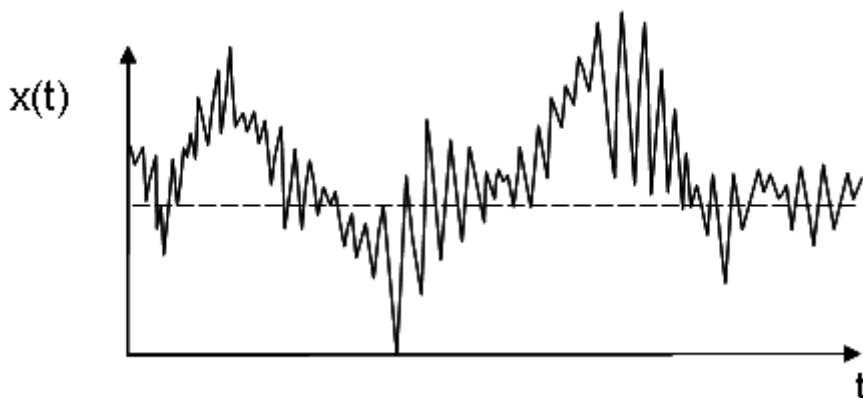


O “Time History” da Resposta (à excitação desse vento) para uma estrutura com frequência natural fundamental alta terá a forma:



Ou seja, a componente flutuante do vento não induz respostas significativas para estruturas com frequência natural alta (em geral estrutural baixas).

O “Time History” da Resposta de uma estrutura com frequência natural baixa será muito mais pronunciada:



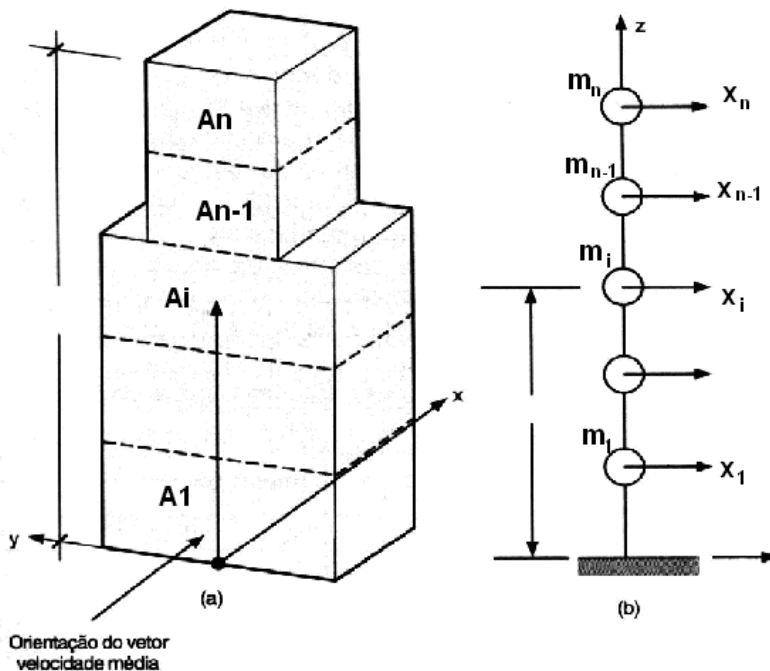
Quando a frequência fundamental de uma estrutura é maior que 1 Hz (período natural menor que 1 segundo) pode-se depreciar a contribuição explícita destes efeitos de ressonância. Estruturas cuja frequência fundamental seja menor que 1 Hz serão as susceptíveis de gerar amplificações significativas como resposta à excitação das componentes flutuantes.

A presença desses efeitos de ressonância são os que geram efeitos que justificam fazer uma análise dinâmica para vibrações induzidas pelo vento na direção do fluxo do mesmo, e o campo de aplicação será o das estruturas esbeltas (frequência natural menor que 1 Hz).

6.5 Metodologia da Norma NBR 6123

A norma NBR 6123 apresenta uma metodologia de “cálculo dinâmico” que procura levar em conta os efeitos “na direção da velocidade do vento” das rajadas.

A metodologia convida a adotar um modelo discreto simplificado.



Na base desse esquema pode se modelar uma estrutura plana para cada uma de 2 direções ortogonais do vento, correspondentes a 2 direções principais dos elementos resistentes a forças horizontais da estrutura.

Da análise da estrutura em cada uma dessas direções, se acham as frequências próprias e as formas modais da estrutura :

$$f_j \quad \text{e} \quad \{\phi_j\}$$

Se a estrutura for regular, será suficiente levar em conta somente o 1º modo, e também poderá se calcular os parâmetros modais associados a esse modo único de maneira simplificada.

Aos efeitos da análise a norma separa os efeitos das rajadas e os efeitos da velocidade média, assumindo a rajada como processos estacionários com média zero.

A força sobre uma porção da estrutura associada à coordenada i será:

$$F_i = \bar{F}_i + \hat{F}_i$$

$\bar{F}_i$ $\leadsto$ força associada ao efeito da velocidade média

$\hat{F}_i$ $\leadsto$ força associada ao efeito da porção flutuante

O **efeito da velocidade média** é assumido como:

$$\bar{F}_i = \bar{q}_0 b^2 C_{ai} A_i \left(\frac{z_i}{z_{ref}} \right)^{2_F} \quad \begin{array}{ll} \bar{q}_0 = 0,613 V_p^2 & \text{Pressão dinâmica} \\ \bar{V}_p = 0,69 V_0 S_1 S_2 & \text{Velocidade de projeto} \end{array}$$

$\underline{b}$ e $\underline{p}$ são determinados de acordo à rugosidade do terreno na tabela 20 da norma

O **efeito da porção flutuante** da velocidade é considerado separadamente para cada modo de vibração.

Na notação empregada à continuação, ϕ_i será assumido como o deslocamento modal normalizado, correspondente à coordenada i no modo para o qual se está fazendo o cálculo. Atenção (na notação completa se escreveria ϕ_{ij} sendo j o índice associado ao modo. Do mesmo modo a notação F_i também se escreveria F_{ij}).

“Para cada modo de vibração” a norma gera uma carga estática equivalente.

A expressão da componente da força estática equivalente para a coordenada i do modo sendo analisado é leva a expressão:

$$\hat{F}_i = F_H \frac{m_i}{m_0} \phi_i \quad \text{sendo que:} \quad F_H = \bar{q}_0 b^2 A_0 \frac{\sum_{i=1}^n C_{ai} \left(\frac{A_i}{A_0} \right) \left(\frac{z_i}{z_{ref}} \right)^F \phi_i}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m_0} \phi_i^2} \xi$$

m_0 e A_0 são uma massa e uma área arbitrárias

b é determinado de acordo à rugosidade do terreno na tabela 20 da norma

**É importante não confundir-se com a notação adotada:
 ξ não é amortecimento!**

ξ é o **coeficiente de amplificação dinâmica**, que é determinado mediante gráficos inclusos na norma de acordo com cinco categorias de terreno em função da altura, comprimento, do amortecimento e da relação:

$$\frac{\bar{V}_p}{fL} \quad \text{Onde } L = 1800 \text{ m}$$

Uma vez calculadas cada uma dessas forças (associadas ao modo em questão) se aplicam as mesmas a estrutura e se calculam os efeitos (solicitações, deslocamentos e outros). Esses resultados representam as respostas modais para esse modo.

Repete-se o mesmo procedimento para cada modo, obtendo-se as respostas modais para cada um deles por separado.

O efeito combinado poderá ser calculado mediante o critério da raiz quadrada da adição dos quadrados das respostas modais calculadas.

Atenção: não esquecer de superpor os efeitos dinâmicos aos efeitos da velocidade média em todo o relacionado à avaliação resistente dos elementos estruturais ! Aos efeitos funcionais de conforto humano, os efeitos da porção flutuante será a única relevante. De acordo à norma NBR 6123, **a amplitude máxima da aceleração máxima não deverá ultrapassar os 0,1 m/s²**. Essa aceleração pode ser

calculada como superposição (raiz quadrada da adição dos quadrados das acelerações obtidas para cada coordenada em cada modo).

Sendo que os efeitos são sempre considerados como estacionários, a amplitude da aceleração da coordenada i para cada modo j (a_{ij}) é obtida a partir da frequência modal angular (ω_j) e da amplitude do deslocamento associada ao modo j para a coordenada i (u_{ij}):

$$a_{ij} = -\omega_j^2 u_{ij} \text{ onde } \omega_j = 2 \pi f_j$$

(f_j = frequência modal associada ao modo j)

E a avaliação na superposição modal será feita como:

$$|a_i| = \sqrt{\sum_j |a_{ij}|^2} < 0,1 m/s^2$$

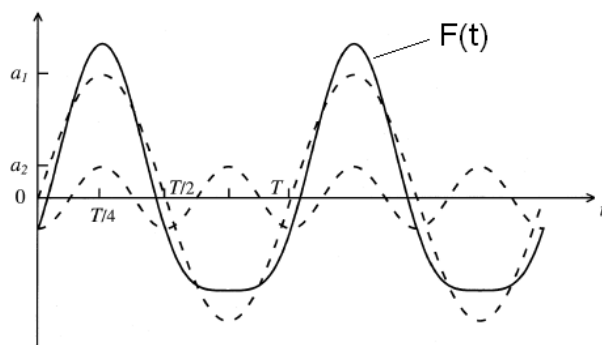
No Anexo C pode ser achada uma qualificação mais ajustada dos efeitos do deslocamento referente à percepção e conforto humano.

Como se pode compreender, este método não é propriamente um método dinâmico. Poderia se dizer que se trata de um modelo de superposição de efeitos que levam em conta os efeitos dinâmicos das rajadas associados à resposta da estrutura. A norma brasileira NBR-6123 ressalta a necessidade de uma análise dinâmica mais exhaustiva para casos de estruturas especialmente esbeltas e flexíveis.

6.6 Sinais e Espectros de Fourier

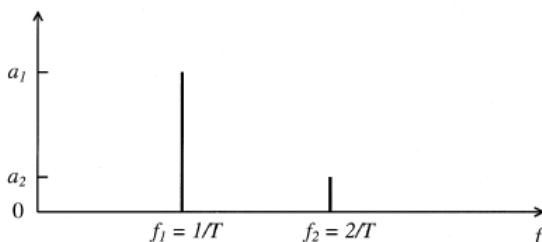
Sinais e Espectros de Fourier

Da análise de Fourier sabemos que dada uma função periódica $F(t)$, podemos descompor a mesma nas componentes harmônicas:

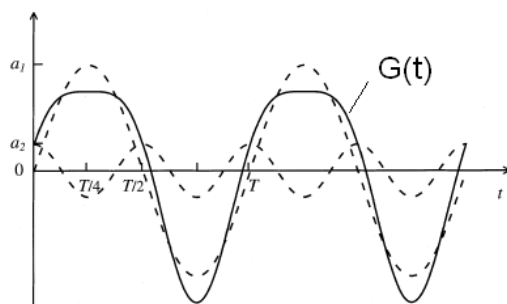


Esta primeira gráfica representa o valor da função para cada t . Se diz que é a representação da função no domínio do tempo.

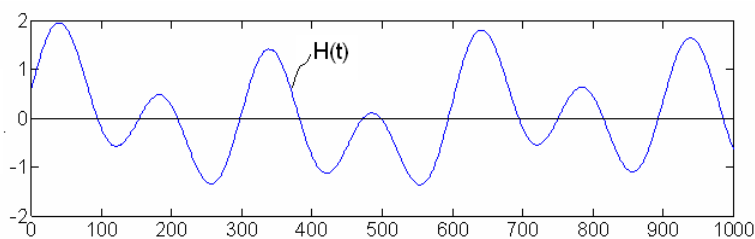
Expressando graficamente os valores das amplitudes das componentes harmônicas em função das frequências obtemos o **espectro de amplitudes** dessa função (expressão da função no domínio das frequências).



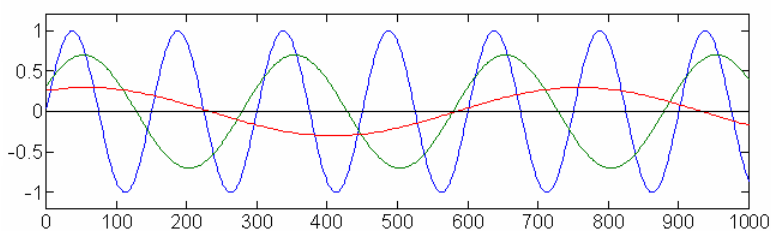
Esta forma compacta de descrever a função fornece explicitamente informação muito importante que a gráfica no domínio do tempo não contém. Mas a informação do espectro de amplitudes é incompleta já que não especifica qual é a fase entre os harmônicos. Veja-se a função $G(t)$ resulta no mesmo espectro de amplitudes e na realidade é bem diferente a $F(t)$.



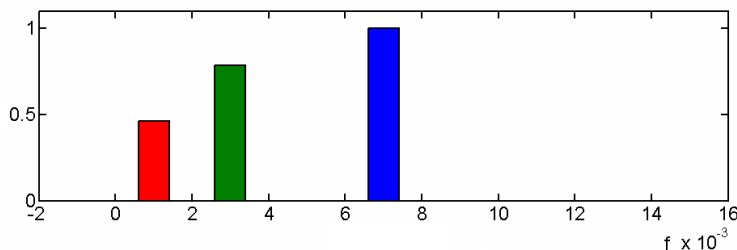
Seja por exemplo a função periódica $H(t)$ expressada graficamente no domínio do tempo:



Visualizando a composição harmônica da mesma:



Teremos que o espectro de amplitudes será:



Veja-se a diferença entre a função $H(t)$ e a função $F(t)$.

$F(t)$ é periódica, daí que o espectro dará valores somente nos múltiplos da frequência fundamental $f_1 = 1/T$.

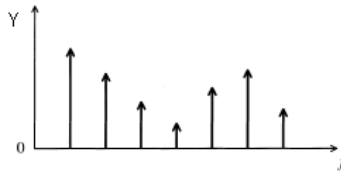
$H(t)$ parece periódica, mas na realidade não é. Ela tem componentes com frequências que não são múltiplos da frequência fundamental.

Espectros podem ser definidos para qualquer magnitude (deslocamento, velocidade, energia, etc) associada a um sinal. De acordo à periodicidade ou não do sinal teremos espectros de características diferentes.

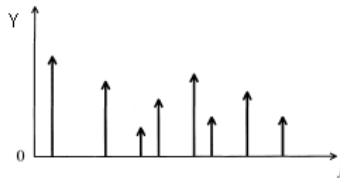
O espectro fala do conteúdo de frequências do sinal. Um sinal que não seja cíclico não terá nenhuma frequência discreta que identifique um certo conteúdo nele. Podemos dizer que um sinal que não é cíclico, é um sinal de período infinito.

Extrapolando o conceito de espectro para uma magnitude de um sinal que não seja cíclico nem quase-cíclico, o conteúdo de frequências no espectro resultará contínuo e não discreto.

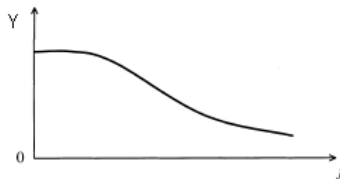
Espectro da magnitude Y de um sinal periódico:



Espectro da magnitude Y de um sinal quase periódico:



Espectro da magnitude Y de um sinal transiente.



Recapitulando, um sinal é uma função do tempo. Como temos visto ele pode ser representado no domínio do tempo (o que resultaria o mais natural). A representação no domínio da frequência interessa já que deixa expressa propriedades importantes do sinal que são as mais relevantes na análise de excitações e as respostas às mesmas.

Consideremos o caso de um oscilador simples excitado harmonicamente (seja ω a frequência angular da excitação). A resposta estacionária de deslocamentos será na mesma frequência da excitação, mas com certa fase ϕ . Se a gente conhecer todos os parâmetros da excitação e do oscilador, a gente poderá achar toda a informação da resposta estacionária: amplitude, frequência angular (já sabemos que ela é a mesma ω da excitação) e também a fase ϕ . Se voltamos a fazer o mesmo experimento com a mesma excitação e o mesmo oscilador, os resultados serão exatamente os mesmos. Todo está completamente determinado, já que os parâmetros eram **determinísticos**.

Como vimos anteriormente os sinais determinísticos podem ser classificados em periódicos, quase periódicos e transientes. Respectivamente, os espectros resultantes são discretos com espaçamentos iguais, discretos com espaçamentos irregulares, e contínuos.

Sinais quase – periódicos resultam, por exemplo, da combinação de 2 sinais com frequências ω e ω' , quando o quociente de ω/ω' não resultar um numero racional. Por exemplo, o sinal: $s(t) = 3 \sin 2t + 2 \sin \pi t$ será quase- periódico

Sinais periódicos e quase periódicos podem sempre ser expressos como uma soma de funções senoidais. Os sinais transientes são aqueles que não podem ser expressos como soma de funções senoidais (Serie de Fourier). Exemplos de sinais transientes são quaisquer sinais que não sejam nem periódicos nem quase- periódicos: $s(t) = 3t \sin \omega t$, $s(t) = \sin(\log t)$, etc.

Comentário:

Aos efeitos do cálculo, ao espectro $X(f)$ de um sinal se chega a partir da historia no tempo do sinal $x(t)$ mediante a Transformada Integral de Fourier. Para isso se estende a definição do sinal para $t < 0$, e o recorrido da transformada será complexo:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{(-j2\pi ft)} dt$$

A tecnologia de processamento de registros permite hoje em dia inferir espectros de maneira automatizada, mas com procedimentos analíticos diferentes aos do cálculo manual. O importante de destacar é que o espectro de certo sinal resulta atingível na mesma medida que a leitura das histórias no domínio do tempo.

Os tipos de sinal que mais interessam aos efeitos da análise vibracional são os “sinais determinísticos” e os “sinais randômicos”.

Para sinais **randômicos** (estocásticos) desconhecemos os parâmetros que nos permitem conhecer a resposta resultante quando os processos são determinísticos.

A representação matemática dos mesmos exige considerações probabilísticas.

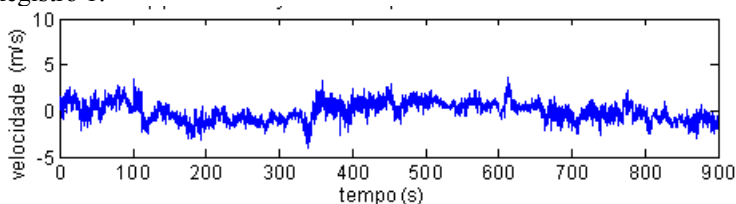
Em certos tipos de processos randômicos, quando se repetem, nas respostas aparecerão padrões comuns, mesmo se a resposta não será sempre exatamente a mesma como nos sinais determinísticos. De acordo à maior uniformidade na presença desses padrões (definidos nos valores atingidos pelos parâmetros estatísticos) se terão processos randômicos estacionários e processos ergódicos.

Ninguém pode agendar certa velocidade de tempo para certo lugar. O sinal da velocidade do vento é claramente **randômico**. A pesar disso resulta razoável supor eles como ergódicos.

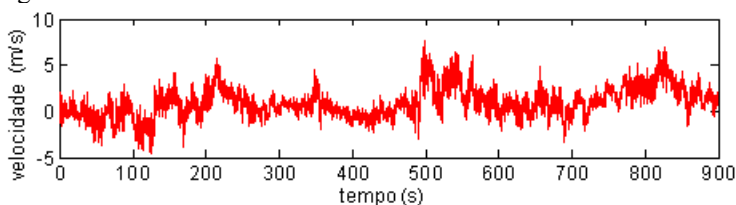
Tomemos os “Time Histories “ de velocidades do vento em um certo lugar.

Consideremos duas amostras sendo que entre um registro e outro passaram 30 minutos.

Registro 1:

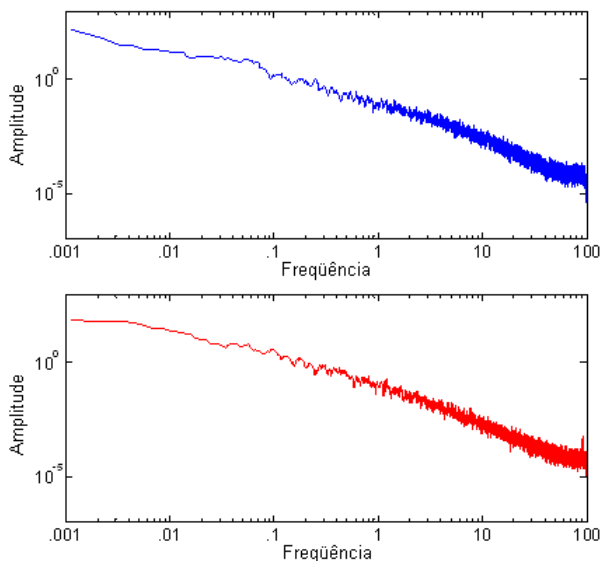


Registro 2:



Os sinais parecem bem diferentes e resulta difícil enxergando nas histórias decidir se existe algum padrão em comum.

Se agora enxergarmos nos espectros de Fourier de amplitudes de velocidade associadas a esses mesmos registros, veremos que os mesmos são muito similares.



Devemos destacar que nestes espectros a cada freqüência corresponde a amplitude associada à velocidade. O espectro não fornece informação sobre fase entre componentes.

Por outra parte, o registro resulta pontual e não “denuncia” qual é a **correlação** entre valores em um ponto e outro posicionado a certa distância dele.

Outra característica de estes espectros extraídos diretamente de amostras locais é que se a gente modificar o intervalo durante o qual se fazem esses registros, o espectro resultará modificado também.

Os espectros correspondem a velocidades totais.

Dissociando a velocidade média do vento da porção flutuante poderíamos obter espectros de amplitudes de velocidades flutuantes.

Do mesmo modo poderíamos obter registros de espectros de potência das velocidades flutuantes que seriam os espectros dos quadrados das amplitudes das velocidades.

6.7 “Espectro de potência da velocidade do vento” ou “Função de densidade espectral de potência do vento”

Os “espectros de potencia da velocidade do vento” expressam a “quantidade de energia contida na porção flutuante do vento para cada frequência”:

$$S(f)$$

A importância dos mesmos surge da inter-relação que existe entre eles e os “espectros de potencia da pressão flutuante”:

$$Sp'(f)$$

Dado um ponto situado a uma altura z resultará que:

$$S_{p'}(z, f) = (\rho \cdot c_{ar} \cdot U_z)^2 S(z, f)$$

Onde:

$Sp'(z, f)$	é o espectro de potencia da pressão flutuante na altura z .
$S(z, f)$	é o espectro de potencia da velocidade do vento.
ρ	é a densidade do ar
C_{ar}	é o coeficiente aerodinâmico para o ponto considerado
U_z	é a velocidade média para a altura z .

Ou seja, para cada altura z de certa estrutura teremos que o espectro de potencia das pressões flutuantes será proporcional ao espectro de potencia da velocidade do vento.

As expressões dos espectros de potencia do vento foram obtidas empiricamente.

As mais comuns destas expressões são:

$$\frac{nS_u(n)}{\sigma_u^2} = \frac{4 \left(\frac{n\ell_u}{\bar{U}} \right)}{\left[1 + 70.8 \left(\frac{n\ell_u}{\bar{U}} \right)^2 \right]^{\frac{5}{6}}} \quad (\text{Von Karman})$$

$$\frac{nS_u(n)}{\sigma_u^2} = \frac{a_1 \left(\frac{n\ell_u}{\overline{U}} \right)}{\left[1 + a_2 \left(\frac{n\ell_u}{\overline{U}} \right) \right]^{\frac{5}{3}}} \quad (\text{Kaimal})$$

$$\frac{nS_u(n)}{\sigma_u^2} = \frac{0.67 \left(\frac{nL}{\overline{U}} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{nL}{\overline{U}} \right)^2 \right]^{\frac{4}{3}}} \quad (\text{Davenport})$$

$$\frac{nS_u(n)}{\sigma_u^2} = \frac{0.6 \left(\frac{nL}{\overline{U}} \right)^2}{\left[2 + \left(\frac{nL}{\overline{U}} \right)^2 \right]^{\frac{5}{6}}} \quad (\text{Harris})$$

Nas quais n representa a frequência em Hz.

As expressões adotadas por diferentes normas podem ser apreciadas na tabela:

Table 5. Wind Spectra and Turbulence Length Scales in Codes and Standards

	Wind spectra (unified)	Turbulence length scale (m)
ASCE 7	$\frac{fS_v(f)}{\sigma_v^2} = \frac{6.868x}{(1+10.302x)^{5/3}}, \quad x = \frac{f \cdot L_T^2(\bar{z})}{V^2(\bar{z})}$	$L_T = l(\bar{z}/10)^{\varepsilon}$ l and ε depend on terrain
AS1170.2	$\frac{fS_v(f)}{\sigma_v^2} = \frac{4x}{6.677(2+x^2)^{5/6}}, \quad x = \frac{L_H f}{V_H}$	$L_H = 1,000(H/10)^{0.35}, A$ measure of turbulence scale
NBC	$\frac{fS_v(f)}{\sigma_v^2} = \frac{2x^2}{3(1+x^2)^{4/3}}, \quad x = \frac{1,200f}{V_H}$	1,220; A length scale, Davenport (1967)
RLB-AIJ	$\frac{fS_v(f)}{\sigma_v^2} = \frac{4x}{(1+70.8x^2)^{5/6}}, \quad x = \frac{fL_H}{V_H}$	$L_H = 100(H/30)^{0.5}$
Eurocode	$\frac{fS_v(f)}{\sigma_v^2} = \frac{6.868x}{(1+10.302x)^{5/3}}, \quad x = \frac{f \cdot L_T^2(\bar{z})}{V^2(\bar{z})}$	$L_T = 300(\bar{z}/300)^{\varepsilon}$ ε depends on terrain

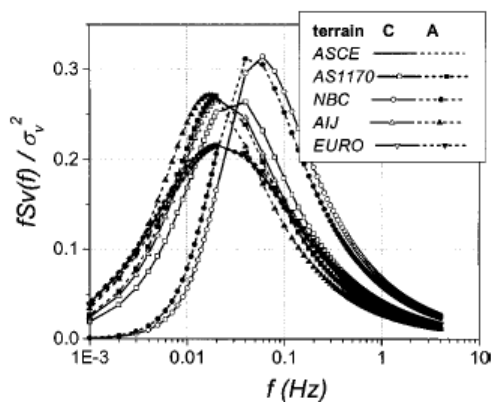
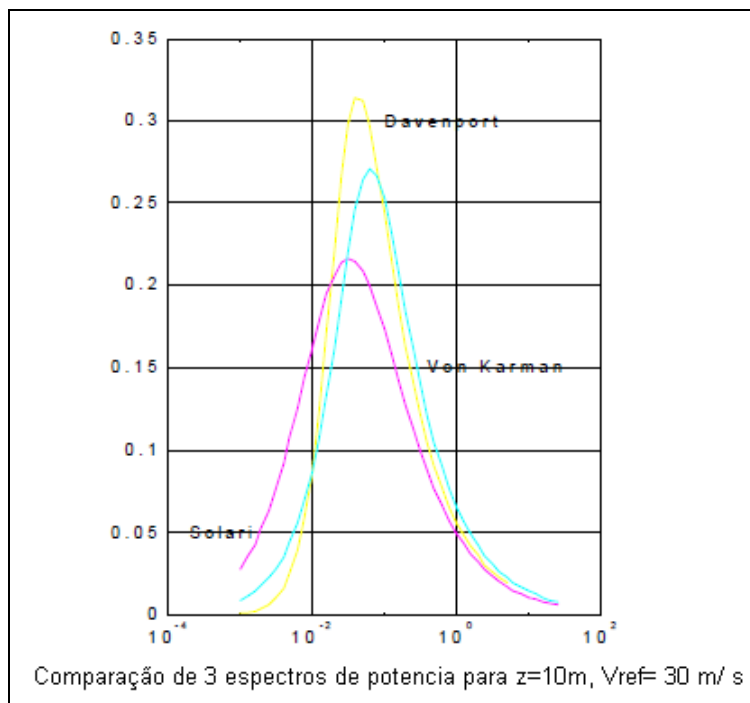


Fig. 3. Wind spectra in codes and standards; Refer to Tables 5 and 6 for involved parameters. *A*: large city center; *C*: open country terrain.

792 / JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING / JUNE 2002



Toda expressão de espectro de potencia, para ser consistente, deverá cumprir:

$$\int_0^{\infty} \frac{S_u(n)}{\sigma_u^2} dn = 1$$

Ou seja, a área encerrada por baixo da curva deve coincidir com o quadrado do desvio padrão da variável aleatória (velocidade ao quadrado).

6.8 Método do vento sintético

O propósito do método é levar em conta os “efeitos dinâmicos na direção do vento devidos à porção flutuante da velocidade do vento”.

De acordo à metodologia o efeito da porção media da velocidade é assumido como estático.

A porção flutuante é descomposta em componentes harmônicas (11) de maneira que uma delas coincida com a frequência fundamental da estrutura.

Considera-se que o intervalo relevante pode ser limitado para frequências associadas ao intervalo restringido de períodos entre 600 a 0,5 segundos.

Gera-se uma partição do domínio das frequências (períodos) de maneira que um dos intervalos esteja associado à uma frequência coincidente com a frequência fundamental.

O resto das frequências que estarão associadas aos harmônicos serão iguais à frequência fundamental dividida por uma potencia de 2 ou multiplicada por uma potencia de 2 (fazendo que todas elas estejam dentro do intervalo restringido mencionado anteriormente: 0,5 s a 600 s).

Por exemplo, se o período fundamental for 2 segundos os períodos associados aos harmônicos seriam:

$$0,5 - 1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - 256 - 512$$

Se o período fundamental for 1,5 segundos:

$$0,75 - 1,5 - 3 - 6 - 12 - 24 - 48 - 96 - 192 - 384 - 576$$

Com o qual vemos que sempre resultarão 11 harmônicos.

Disso resulta que a expressão da excitação (por unidade de superfície) para o centro da rajada estará dado por:

$$p'(t) \cong \sum_{k=1}^m C_k \cos\left(\frac{2\pi}{T_r r_k} t - \theta_k\right)$$

$$C_k = \sqrt{2 \int_{(k)} S_{p'}(z, f) df}$$

$$r_k = 2^{k-r}$$

m=11 (deve se lembrar que para um dos valores de k a frequência deve coincidir com a frequência fundamental da estrutura).

O método assume ademais que a máxima amplitude de p' será 0,52 p (52% da pressão total).

O centro de rajada é suposto numa certa altura da estrutura (0,85 h). Considera ademais que cada componente harmônico estenderá seus efeitos em uma faixa centrada na altura do centro de rajada com amplitudes que decrescem até 0 nos bordos das faixas. A largura da faixa fica definida por $2\Delta z_{0k}$, sendo:

$$\Delta z_{0k} = U_0 / 7 f_k$$

Onde:

U_0 é a velocidade média do vento para uma altura de 10m.

f_k é a frequência do harmônico considerado.

Ou seja, para as componentes de maior frequência resultará uma faixa de ação mais reduzida.

Para a superposição das excitações harmônicas se tomam valores de fases aleatória ($\theta_1, \dots, \theta_{11}$) gerados por meio de um processo de Montecarlo.

Aos efeitos do cálculo das amplitudes o método assume o espectro de Davenport com alguma modificação. Na aplicação do método se adota a expressão do espectro de potencia do vento da norma canadense (National Building Code of Canada):

$$\frac{fS(f)}{u^2} = 4 \frac{x^2}{(1+x^2)^{4/3}}; \quad x = \frac{1220f}{U_0}$$

Onde:

U_0 é a velocidade média do vento para uma altura de 10m.

u é a velocidade de fricção que depende da rugosidade do terreno.

f é a frequência em Hz.

Assumindo que a turbulência é de baixa intensidade, vincula-se a densidade espectral das pressões flutuantes p' : $Sp'(z, f)$ e o espectro de potencia do vento para a mesma altura mediante a relação:

$$S_{p'}(z, f) = (\rho C_{ar} U_z)^2 S(z, f)$$

Onde:

ρ é a densidade do ar

C_{ar} é o coeficiente aerodinâmico para o ponto considerado

U_z é a velocidade média para a altura z .

Com tais ordenadas espectrais podem se calcular as amplitudes das componentes harmônicas no centro de rajada.

Dessa maneira, o procedimento leva à formulação para cada harmônico das amplitudes em cada ponto da superfície da estrutura submetida aos efeitos da velocidade flutuante. A partir dessas amplitudes, com as respectivas fases obtidas pelo processo de Montecarlo e com as frequências correspondentes, se define a excitação combinada das mesmas.

Observação:

- a) No método se assumem unicamente as respostas estacionárias (não se leva em conta a resposta transiente).
- b) A faixa considerada como flutuante pelo método inclui períodos de até 600 segundos. Ou seja, na análise uma parte das componentes harmônicas da excitação gerará na realidade respostas estáticas.

7 Análise sísmo-resistente de estruturas

7.1 Terremotos. Suas causas e mecanismos

Existem três classes de terremotos: os de origem tectônica, os de origem vulcânica e os produzidos pelo homem.

Exemplos de abalos sísmicos induzidos pela atividade humana são os originados pela execução de reservatório de água e de represas.

Os reservatórios de água são muitas vezes construídos em vales cuja conformação geológica está associada a um deslocamento tectônico. Ou seja, que a água é armazenada num local perto de uma falha. Aparece assim um peso adicional considerável que antes não existia e que incrementa os níveis de tensões na falha. A água provoca também uma mudança do grau de saturação do solo que contribui a desestabilizá-lo à vez que lubrifica as falhas. Devido a que a infiltração da água nas capas subjacentes não é instantânea pode levar certo tempo até que a desestabilização gere um abalo na região próxima. Poderá se dar de uma vez ou em etapas induzidas gradualmente com maior ou menor intensidade na medida em que o solo precisa se reacomodar para poder suportar o peso da água. Dependendo do grau de instabilidade previa à construção da obra e da mudança da configuração gerada pela obra poderão surgir abalos moderados ou mesmo terremoto de intensidade considerável. O assunto deste tipo de abalos tem sido fonte de polemica, e não existe unanimidade se a causa de certos terremotos é a obra de engenharia ou se a presença da mesma por perto do local é simplesmente uma coincidência. “Casualmente ou não”, durante os dez anos depois de construída a presa Hoover se produziram centos de terremotos no sul do estado de Nevada. Certo é que nos últimos 40 anos vêm se produzindo terremotos de intensidade apreciável em locais de baixo risco e perto de locais onde foram construídos reservatórios. A palavra chave para pesquisar informação na rede sobre este fenômeno é RIS (Reservoir Induced Seismicity).

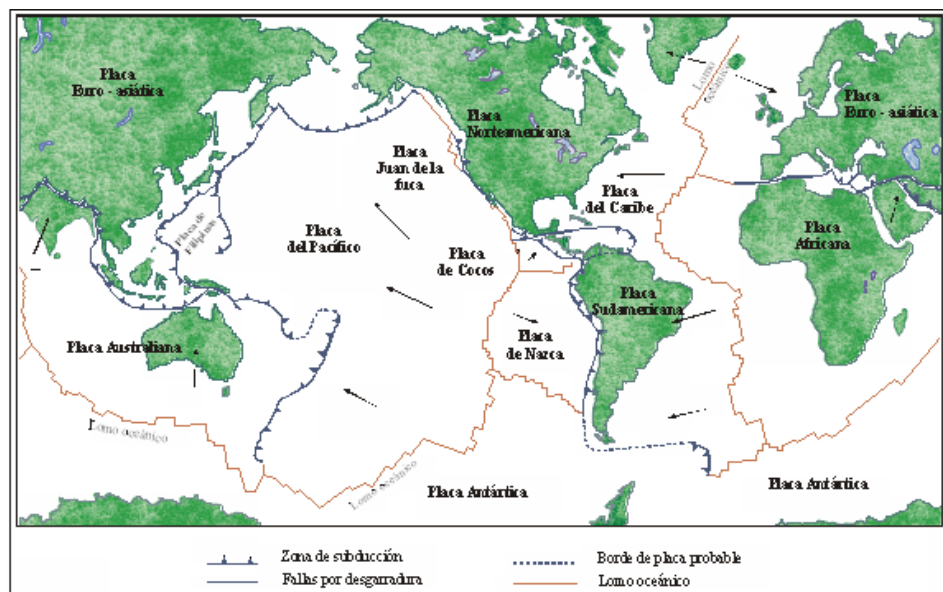
Trabalhos de extração de minerais podem provocar deslocamentos de rochas no subsolo e gerar abalos discretos. Podem se dar também de maneira extrema como aconteceu em 1989 com um sismo de magnitude 5.7 que foi gerado pelo colapso das paredes de uma mina na Alemanha.

A extração (ou injeção) de fluidos no solo pode induzir também abalos. Existe quase a certeza que abalos que têm se produzido na região de San Antonio em Texas se devem ao bombeio de água do aquífero. Não se tem registro de abalos de magnitude maior que 3 induzidos pela exploração de aquíferos, o que dá para não se inquietar demais. É importante destacar que nem sempre a exploração de aquíferos resulta em abalos, mas resulta fátível algum que outro tremor como resultado dessa exploração. Um fenômeno interessante é o da região de Los Angeles na Califórnia na qual cada ano se tem uma oscilação das cotas do solo de mais de 10 cm devido ao regime de extração de água e restituição da mesma pelas chuvas (efeito esponja).

Devido à quantidade de chuvas que as vezes acontecem na nossa região, e a quantidade de água sendo extraída do aquífero temos razão suficiente para acreditar que pelo menos tremores menores podem se dar devido aos deslocamentos associados ao efeito esponja. Esses deslocamentos podem se manifestar em abalos que ninguém daria importância na Califórnia, mas sendo o caso do Paraná ou São Paulo daria para assustar a mais de um. É de supor que esse tipo de abalo menor daria para ser percebido por quem estiver em prédios flexíveis e induziria sem dúvida muitas ligações aos engenheiros responsáveis pelos projetos.

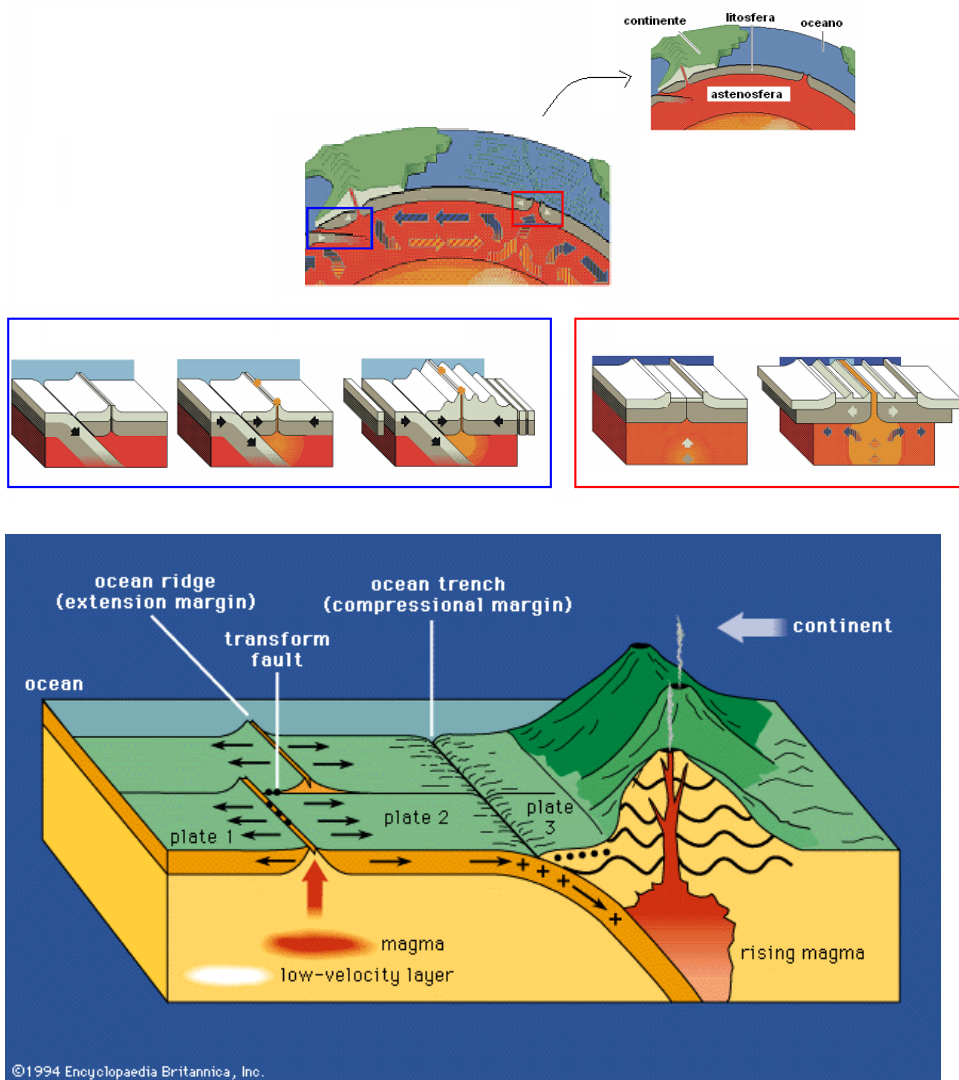
Os terremotos tectônicos são os de maior interesse por serem os mais comuns e os mais devastadores.

A litosfera está constituída por um mosaico de blocos rígidos chamados placas que se movimentam um respeito ao outro. Existem 6 placas continentais (África, América, Antártida, Austrália, Europa, e a Placa do Pacífico) e 14 placas subcontinentais (Nazca, Caribe, etc.)



Dos registros sísmicos ao longo do tempo se pode afirmar que as regiões onde se produzem a maior parte dos terremotos são muito definidas e coincidem com os encontros entre placas. Uma das explicações para a geração dos terremotos se baseia no equilíbrio térmico dos materiais que compõem o planeta. Com o incremento da radiatividade e conseqüente aquecimento do núcleo, provocando o deslocamento das capas superficiais cuja temperatura é relativamente baixa. Estes fenômenos se manifestam em ciclos de convecção, que são os que dão origem a esforços de corte na base das placas e o movimento das mesmas.

As placas se movimentam livremente respeito as capas subjacentes (Astenosfera) e também se movem uma respeito à outra de maneiras. As maneiras de deslocamento relativo podem ser: deslocamento em paralelo aos bordos (caso da falha de “San Andrés”), normal ao borde se separando uma da outra (origem dos lombos oceânicos) ou uma se deslizando por baixo da outra (o que é chamado “subduction”).



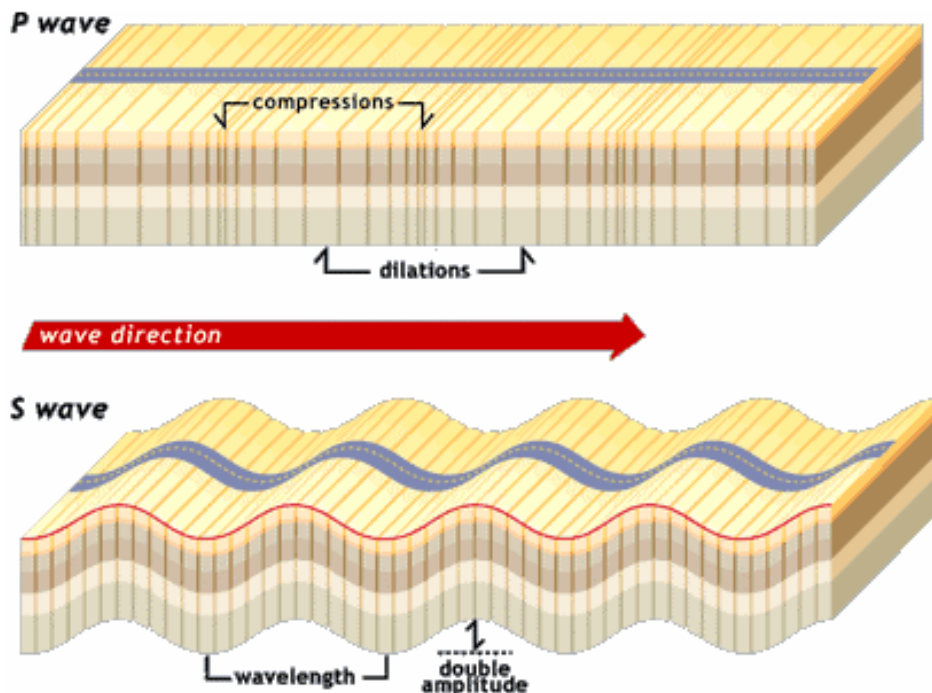
Os terremotos tectônicos são justamente a consequência de um deslocamento súbito das placas ao longo das falhas. O esforço vai se acumulando até superar a resistência das rochas que se deslocam na hora da ruptura. O evento é acompanhado por uma grande liberação de energia até as placas atingir a nova posição de equilíbrio.

As atividades humanas podem também gerar terremotos como consequência de grandes recheios, hidroelétricas, sucção profunda de água de aquíferos, detonação de explosivos, e outras. Com isso podem se produzir eventos sísmicos em locais nos quais não existem motivos tectônicos para isso. Mas também terremotos tectônicos podem se produzir em regiões que ficam bem longe das falhas como na região de New Madrid nos EEUU.

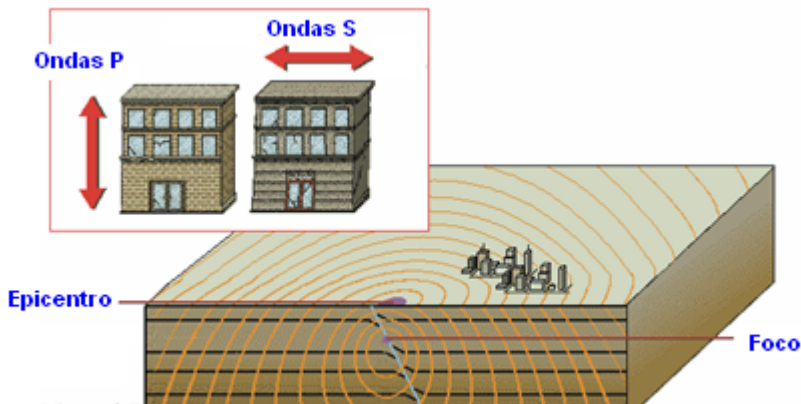
A energia liberada subitamente pelo sismo se propaga por meio de ondas de deformação. Estas ondas são assumidas como elásticas, e por isso terão velocidades de propagação definidas pelo módulo elástico e a densidade dos materiais pelos quais se desloca. As ondas são classificadas em: ondas de corpo e ondas de superfície.

As ondas de corpo são ondas longitudinais de “compressão - dilatação” (ondas P) e transversais de “corte” (ondas S).

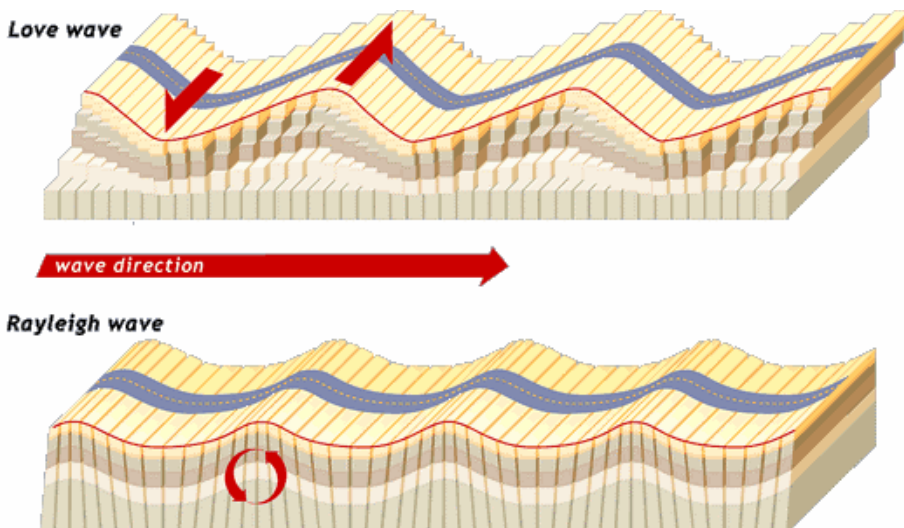
As ondas P ou primárias geram deslocamentos do material na direção da propagação, e as ondas S ou secundárias geram deslocamentos em planos normais à direção de propagação.



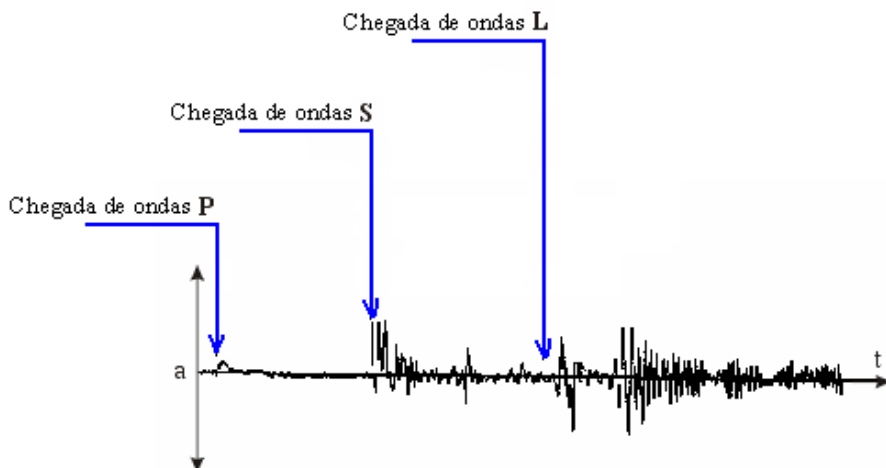
Os mecanismos de propagação fazem que as ondas P cheguem segundos antes que as ondas S. As ondas P se propagam em meios sólidos e líquidos e as ondas S se propagam unicamente em meios sólidos já que os líquidos não tem rigidez ao cortante.



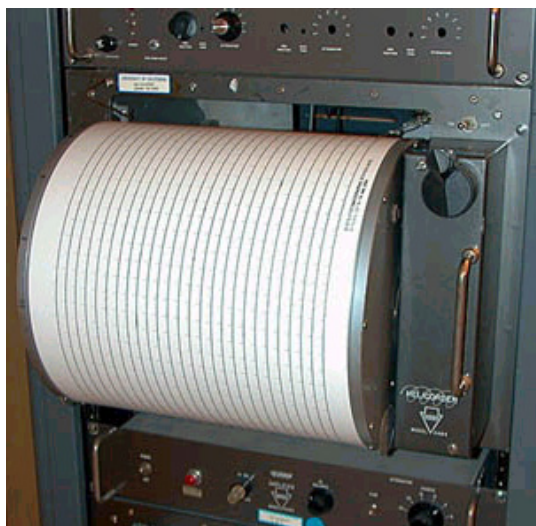
As ondas superficiais geram deslocamentos unicamente na faixa superficial do solo. Se classificam em 2 tipos: ondas L (Love) e ondas R (Rayleigh). As ondas L são transversais como as ondas S, mas possuem somente componentes horizontais (normais à direção de propagação). As ondas R geram trajetórias elípticas das partículas em planos perpendiculares à superfície livre do solo.



As ondas de superfície se propagam mais devagar que as de corpo, e geralmente as ondas L são mais velozes que as ondas R. O anterior pode não se dar nos casos de topografias que sejam especialmente mais propícias para a propagação de certos tipos de ondas em e não de outras.

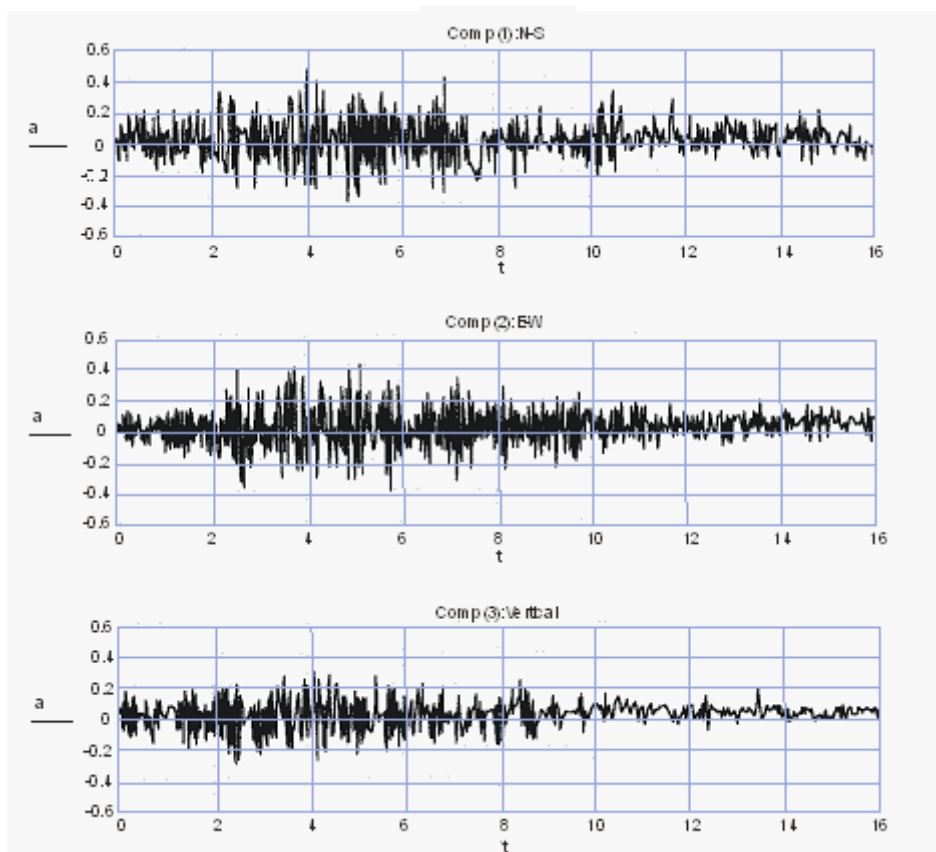


As características das ondas sísmicas são estudadas na base da leitura das características das vibrações mediante sismógrafos, que podem registrar as histórias de deslocamentos, velocidades e acelerações do solo.



Os sismogramas permitem localizar o epicentro de um sismo e também calcular a magnitude em função da máxima amplitude e calculando a diferença de tempos entre a chegada das ondas S e P. Para achar o epicentro resulta suficiente 3 registros de lugares diferentes e fazer triangulação.

A história de acelerações é chamada “acelerograma” e se realiza mediante acelerômetros



Os acelerômetros são dispostos de maneira de conseguir registrar as componentes de aceleração do solo em 3 direções ortogonais.

Para definir o tamanho de um sismo se usam 2 tipos de medidas “magnitude” e “intensidade”. Nenhuma delas resulta realmente relevante desde o ponto de vista da engenharia estrutural, e somente os acelerogramas são a base para a análise estrutural.

A magnitude é uma medida absoluta independente da locação, ela se refere à quantidade de energia liberada durante o evento. Ela se calcula a partir das amplitudes registradas pelos sismogramas e se expressa em números decimais em escala logarítmica. A escala de magnitude mais usada é a de Richter que se baseia em 10 graus de medida. A magnitude (M) não fornece nenhuma informação respeito à duração e componentes de frequências dos eventos e por isso não fornece nenhuma informação de interesse para os engenheiros. Justamente, por isso é que a Magnitude é de interesse para sismólogos e para os meios de difusão que procuram em poucas palavras qualificar a importância do evento.

A intensidade é uma medida completamente subjetiva e procura qualificar o grau de destruição que resultou em um lugar determinado. Ou seja, a intensidade será maior nas proximidades do epicentro. Dizer que um sismo teve mais intensidade que outro não é geralmente uma questão coerente. A escala adotada para medir a intensidade é a Mercalli Modificada e se usa a notação MM. A escala é de 12 graus identificados pelos números romanos (I a XII). Aos efeitos de poder tirar proveito da informação dada pela intensidade, foram feitos estudos que correlacionam as intensidades com as características dinâmicas que são relevantes para o emprego na engenharia de estruturas. Trata-se de analogias que se baseiam em extrapolações que tentam identificar quais acelerações do solo podem provocar os danos associados às diferentes intensidades.

MM	I	II	III	IV	V	VI
Estimativa da Aceleração Máxima	0,001 g	0,002 g	0,005 g	0,015 g	0,030 g	0,061 g

MM	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Estimativa da Aceleração Máxima	0,132 g	0,306 g	0,637 g	1,121 g	2,548 g	>3,567 g

7.2 Mapas de Risco Sísmico

Os acelerogramas registrados em um local específico dependem da proximidade à fonte, das características do solo, da topografia, da atenuação. Os parâmetros mais relevantes para qualificar o movimento do solo são as amplitudes, as frequências e a duração do evento.

Zona sísmica	Valores de a_g
Zona 0	$a_g = 0,025g$
Zona 1	$0,025g \leq a_g \leq 0,05g$
Zona 2	$0,05g \leq a_g \leq 0,10g$
Zona 3	$0,10g \leq a_g \leq 0,15g$
Zona 4	$a_g = 0,15g$

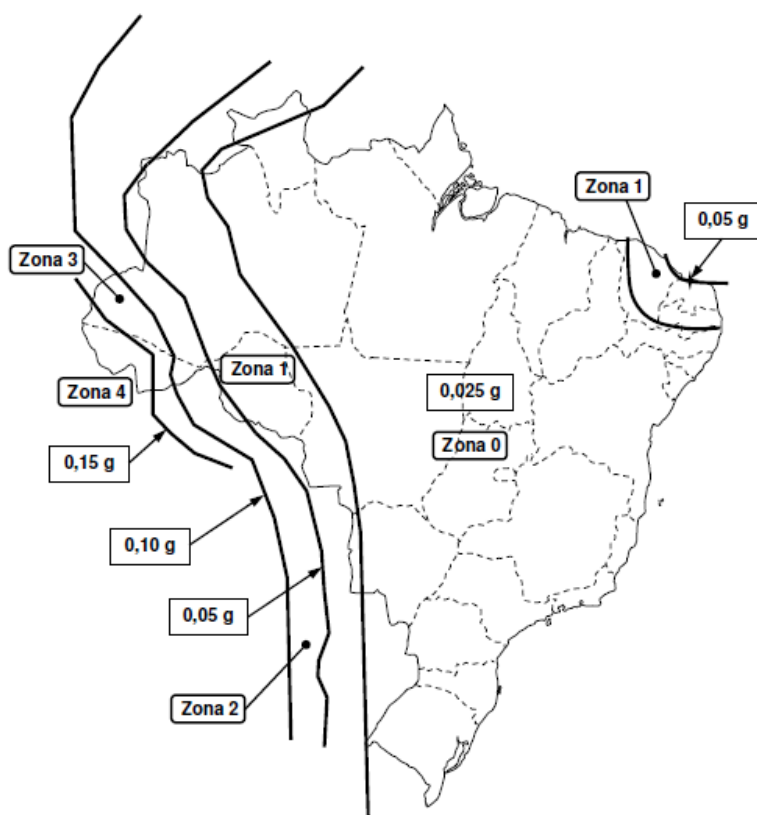


Figura 1 – Mapeamento da aceleração sísmica horizontal característica no Brasil para terrenos da classe B ("Rocha")

Dos acelerogramas registrados em diferentes pontos são demarcadas regiões com potencial de risco sísmico similar. Levando em conta a frequência de ocorrência de eventos e a distância a falhas geológicas, se estima a probabilidade que um evento de uma magnitude maior que certa magnitude dada possa acontecer nessa região para certo intervalo de tempo. Essa demarcação em regiões com similar risco é a base dos mapas de risco sísmico. Nesse mapa cada região tem associada uma aceleração pico do solo expressada em termos de g .

7.3 Resposta Estrutural

As respostas estruturais devidas às forças inerciais às quais a estrutura está submetida durante um terremoto são função das acelerações do solo, das características do solo, da duração da excitação, da resistência à fricção da estrutura com o solo, das propriedades dinâmicas da estrutura, e outras muitas variáveis. A estrutura cuja base acompanha o deslocamento do solo poderá gerar respostas amplificadas na medida em que as frequências próprias da estrutura coincidam com frequências para as quais a vibração do solo possui componentes de importância. O amortecimento será também um fator importante na determinação do nível de resposta, o usual é assumir um amortecimento de 5% ($\xi=0,05$).

O movimento de uma estrutura de um grau de liberdade submetida a uma história de acelerações do solo estará governada pela equação:

$$\ddot{u} + 2\xi \cdot \omega_n \cdot \dot{u} + \omega_n^2 \cdot u = -\ddot{u}_{g(t)}$$

$u(t)$ é a coordenada do deslocamento horizontal em um sistema solidário com o solo. (não é um sistema Galileano já que o solo está se movimentando com aceleração $\ddot{u}_{g(t)}$).

ξ é o amortecimento (0,05)

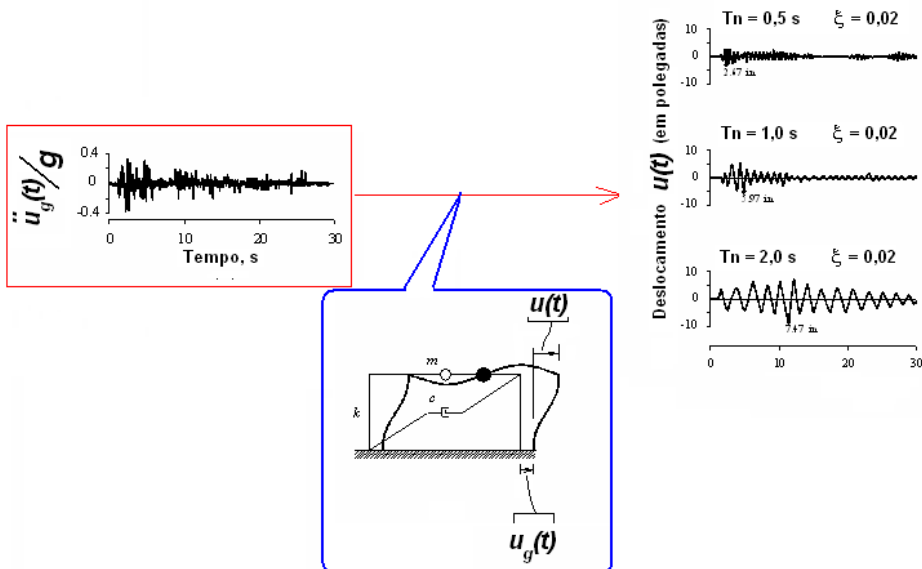
ω_n é a frequência angular natural da estrutura. Em geral se usa como parâmetro o T_n (período natural). $T_n = 1/(2\pi\omega_n)$

$\ddot{u}_{g(t)}$ é a história de aceleração horizontal do solo na direção de $u(t)$

Resulta difícil formular uma solução analítica da equação já que não pode se obter de maneira generalizada as componentes de Fourier dessa função $\ddot{u}_{g(t)}$.

O que mais interessará ao engenheiro de estruturas será poder estimar o deslocamento máximo, já que as solicitações internas da estrutura se derivam e são proporcionais a ele.

Para cada história de acelerações $\ddot{u}_g(t)$, a resposta $u(t)$ de um sistema de um grau de liberdade dependerá somente de T_n e de ξ . Na figura pode se ver a resposta de deslocamentos devido à história de acelerações em certa direção de um certo terremoto para três 3 sistemas de um grau de liberdade com idêntico amortecimento e com períodos naturais de 0,5s ; 1,0 s e 2,0 s.



Lembrando que o deslocamento $u(t)$ é medido no sistema relativo, podemos dizer que $u(t)$ representa a deformação do sistema, ou seja que poderá ser definida uma “força estática equivalente” associada a essa deformação que seria a força que provocaria a mesma deformação que foi provocada pelo terremoto.

$$f_{s(t)} = k \cdot u(t)$$

Deve se ter cuidado na interpretação dessa força f_s que é função do tempo (já que $u(t)$ varia), mas se formos assumir ela como uma história de excitação teríamos que a história do $u(t)$ daria bem diferente. O $f_s(t)$ pode se definir como uma força que atuando “quase - estaticamente” sobre o sistema daria para cada t a deformação que o sistema experimenta durante o terremoto.

k é a rigidez lateral do sistema de um grau de liberdade. Com o qual pode se dizer que:

$$f_{s(t)} = m \cdot \omega_n^2 \cdot u_{(t)} = m \cdot A_{(t)}$$

$$A_{(t)} = \omega_n^2 \cdot u_{(t)}$$

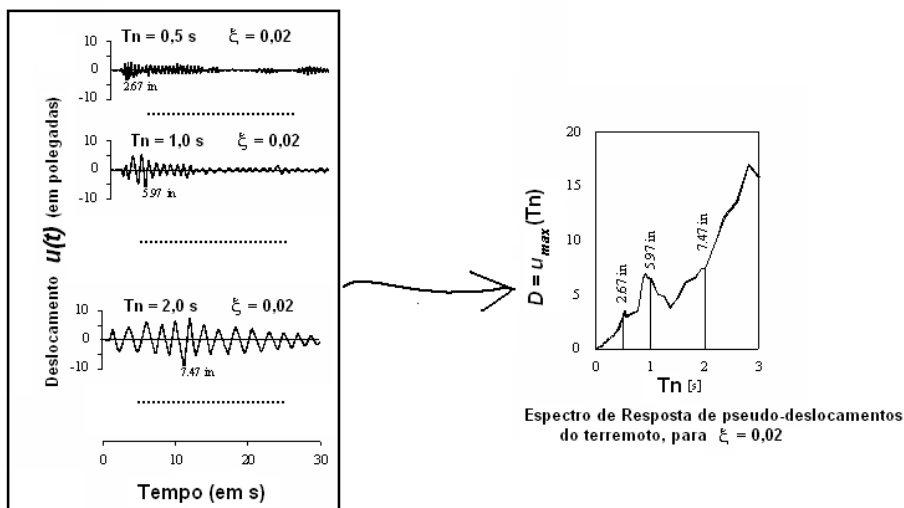
$A_{(t)}$ é chamada “Pseudo – Aceleração” ou “Aceleração Espectral” do sistema.

IMPORTANTE: Não se trata de uma história de acelerações, se trata de um parâmetro fictício que permite achar em cada instante, mediante “análise estático”, a resposta da estrutura.

O cometido central do engenheiro de estruturas (nas horas de trabalho) consiste em dimensionar adequadamente os elementos estruturais. Se a isso agregando que o engenheiro está geralmente habituado a desenvolver análises estáticos, concluímos que o conhecimento da aceleração espectral resulta muito “útil” e “confortável”, mas na realidade o dado que será realmente importante será saber será o valor máximo, ou seja o valor de $A_{(t)}$ que gera as solicitações máximas (que são as mais desfavoráveis) e as que em definitiva definirão o dimensionamento.

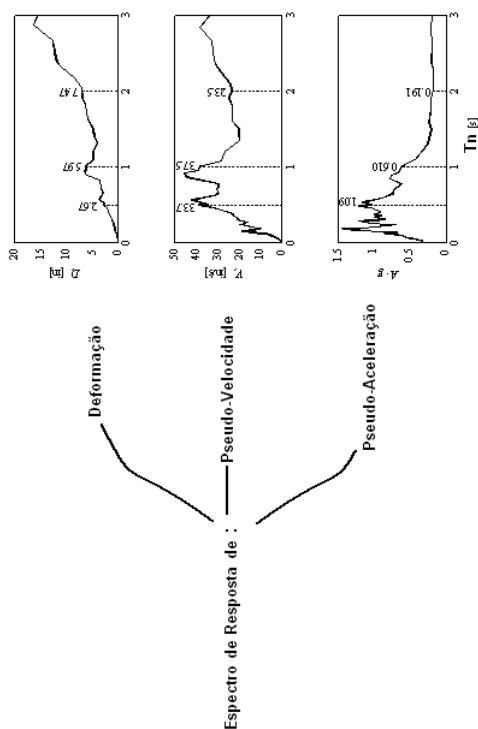
Para poder dimensionar qualquer estrutura de 1 grau de liberdade submetida a esse evento sísmico, o que importará ao engenheiro será saber qual será a força máxima (ou equivalentemente a aceleração espectral ou o deslocamento máximo) para cada configuração estrutural. Isso implica ter os “pseudo - parâmetros” para cada possível T_n e cada possível ξ .

7.4 Espectros de resposta



O Espectro de Resposta de um terremoto será a gráfica que fornece as “respostas pico” de todos os possíveis sistemas de um grau de liberdade, em função do T_n (ou f_n) desses sistemas, sujeitos a uma componente particular (direção) do movimento do solo.

Da mesma maneira poderão ser definidos Espectros de Resposta de Deformação (pseudo-deslocamento), de Pseudo-Velocidade e de Pseudo-Aceleração.



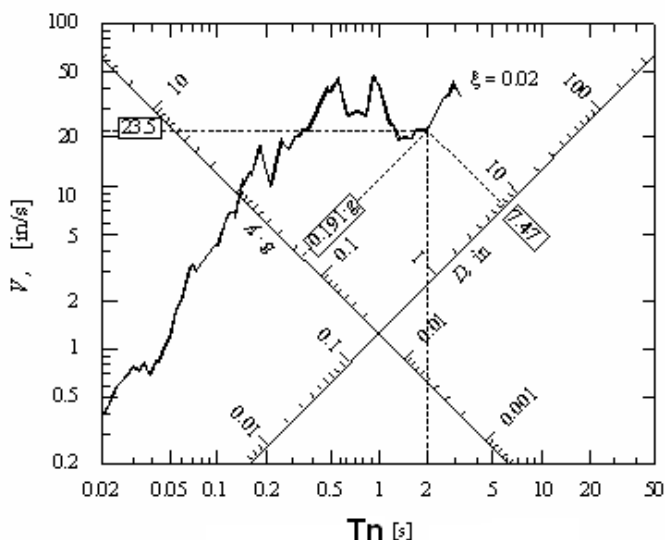
Os três espectros são fontes de informação importante e são necessários para uma visualização da resposta do sistema:

- O espectro de deformação fornece a deformação pico do sistema.
- O espectro de pseudo-velocidade está relacionado à quantidade máxima de energia que do sistema durante.
- O espectro de pseudo – aceleração fornece a força estática equivalente e o cortante na base.

Cumpre-se que:

$$\frac{T_n}{2\pi} A = V = \frac{2\pi}{T_n} D$$

Os três espectros podem ser representados graficamente de maneira simultânea mediante o Espectro Combinado de Resposta D-V-A :



**Espectro Combinado de Resposta D-V-A
do terremoto de El Centro para $\xi = 0,02$**

Os espectros de resposta são definidos para certa direção, o que equivale a dizer que são as respostas para uma certa componente de deslocamento do solo. No mesmo lugar as componentes de direções diferentes terão respostas diferentes.

O interesse da engenharia não consiste em poder adequar o dimensionamento para certa direção de acordo à ação de um terremoto que aconteceu em outro lugar no passado. O engenheiro precisa de “espectros de projeto”.

O “espectro de projeto” para certa locação se baseia em movimentos do solo em muitos eventos passados registrados em outros lugares, em condições similares ou ajustando os valores de acordo às diferenças geotécnicas tanto dos locais como das regiões pelas quais as ondas sísmicas terão que atravessar, de distancia a falhas, do tipo de falhas presentes nas proximidades. O espectro de projeto será fruto de uma análise estatística de espectros de resposta de um grande numero de eventos. O estudo estatístico fornece a distribuição probabilística das ordenadas espectrais e o desvio para cada T_n . A gráfica de todos os valores médios será em definitiva o “espectro elástico de projeto”.

As normas para projetos de estruturas resistentes a sismos subministram as bases para construir o espectro de projeto adequado para certo tipo de estrutura, com certa função e para certo lugar geográfico. Muitos são os dados que influenciam na forma final do espectro de projeto particular.

7.5 Espectro dúctil de projeto

O alvo da Engenharia de Estruturas quando se refere a eventos sísmicos não pode consistir em garantir a integridade estrutural e funcional da estrutura quando ela estiver submetida aos esforços associados ao evento de maior intensidade que a norma daí cobertura. Em geral podemos dizer que para o evento mais intenso, dependendo do tipo de estrutura, a meta será garantir um “desempenho adequado” da mesma. Esse desempenho adequado consiste em geral em impedir o colapso, mas com a possibilidade de dano parcial. Ou seja, que é de esperar que para parte dos elementos estruturais, os limites elásticos serão ultrapassados quando acontecer o sismo mais intenso possível.

Quando certos elementos estruturais deixam de se comportar como elásticos, a resposta estrutural muda respeito a dos espectros elásticos. O dano estrutural sem colapso propicia a dissipação de parte importante da energia que o solo repassa à estrutura. Ao mesmo tempo a estrutura vira mais flexível, o que implica na maioria dos casos respostas menores das que teria a estrutura de continuar se comportando elasticamente.

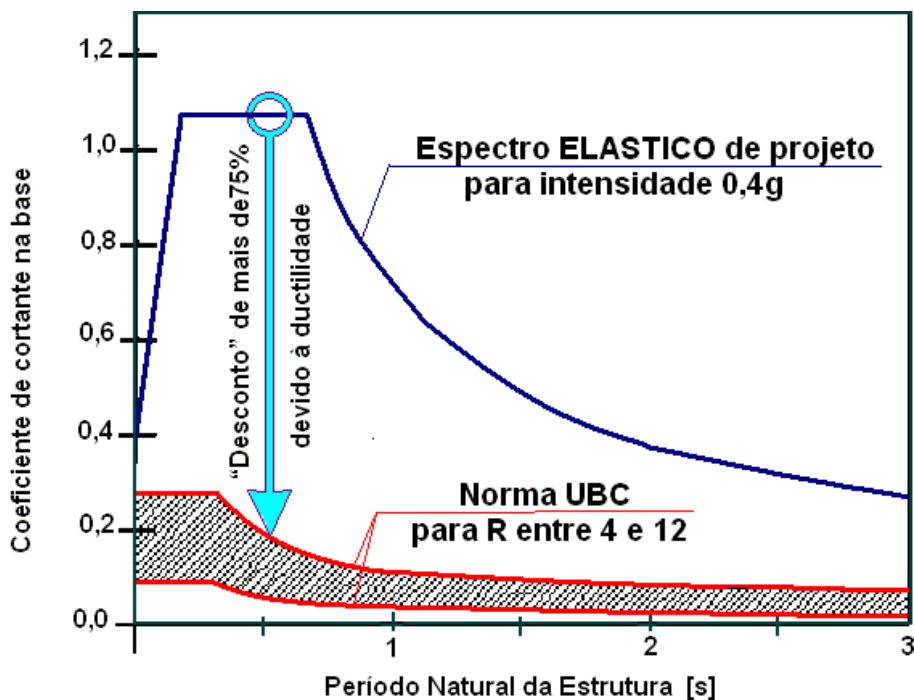
Na maioria das normas a passagem de espectros elásticos a plásticos se efetua mediante a divisão por um valor que em geral é denominado R . Na norma brasileira R é chamado “Coeficiente de Modificação da Resposta”. Na figura pode se ver a cópia da tabela com os valores assinados a R para diferentes tipologias estruturais. Até 8 ! Ou seja, os esforços para as quais o engenheiro calculará os elementos estruturais do projeto serão varias vezes menores que as respostas elásticas.

O grande “desconto” fornecido pelo R está sempre condicionado. Para poder reduzir as solicitações deverá ser respeitado certas condições que garantam a ductilidade da estrutura e que garantam que a estrutura não colapsará antes de desenvolver os mecanismos de “desperdiço” energético.

Tabela 6 – Coeficientes de projeto para os diversos sistemas básicos sísmo – resistentes

Sistema básico sísmo-resistente	Coeficiente de modificação da resposta R	Coeficiente de sobre - resistência Ω_0	Coeficiente de amplificação de deslocamentos C_d
Pilares-parede de concreto com detalhamento especial	5	2,5	5
Pilares-parede de concreto com detalhamento usual	4	2,5	4
Pórticos de concreto com detalhamento especial	8	3	5,5
Pórticos de concreto com detalhamento intermediário	5	3	4,5
Pórticos de concreto com detalhamento usual	3	3	2,5
Pórticos de aço momento-resistentes com detalhamento especial	8	3	5,5
Pórticos de aço momento-resistentes com detalhamento intermediário	4,5	3	4
Pórticos de aço momento-resistentes com detalhamento usual	3,5	3	3
Pórticos de aço contraventados em treliça, com detalhamento especial	6	2	5
Pórticos de aço contraventados em treliça, com detalhamento usual	3,25	2	3,25
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento especial e pilares-parede de concreto com detalhamento especial	7	2,5	5,5
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento especial e pilares-parede de concreto com detalhamento usual	6	2,5	5
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento especial e pórticos de aço contraventados em treliça com detalhamento especial	7	2,5	5,5
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento intermediário e pilares-parede de concreto com detalhamento especial	6,5	2,5	5
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento intermediário e pilares-parede de concreto com detalhamento usual	5,5	2,5	4,5
Sistema dual, composto de pórticos com detalhamento usual e pilares-parede de concreto com detalhamento usual	4,5	2,5	4
Estruturas do tipo pêndulo invertido e sistemas de colunas em balanço	2,5	2	2,5

Exemplo de redução característica de valores espectrais entre o espectro elástico e espectro de projeto de acordo a UBC:

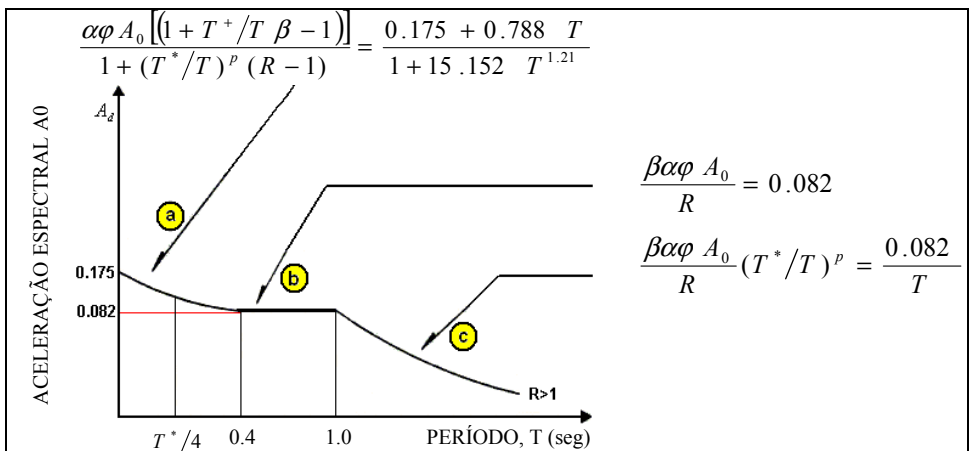


$$\begin{aligned}
 \text{a) } T < T^+ \quad A_d &= \frac{\alpha \varphi A_0 \left[1 + \frac{T}{T^+} (\beta - 1) \right]}{1 + \left(\frac{T}{T^+} \right)^c (R - 1)} \quad c = \sqrt[4]{R/\beta} \\
 \text{b) } T^+ \leq T \leq T^* \quad A_d &= \frac{\alpha \varphi \beta A_0}{R} \\
 \text{c) } T > T^* \quad A_d &= \frac{\alpha \varphi \beta A_0}{R} \left(\frac{T^*}{T} \right)^p
 \end{aligned}$$

$$T < 0.4s \quad A_d = \frac{0.175 + 0.788 \frac{T}{1 + 15.152 T^{1.21}} \quad \text{a)}$$

$$0.4s \leq T \leq 1.0s \quad A_d = 0.082 \quad \text{b)}$$

$$T > 1.0s \quad A_d = \frac{0.082}{T} \quad \text{c)}$$



Exemplo do espectro de projeto para um depósito de açúcar na localidade de Sabaneta na Venezuela

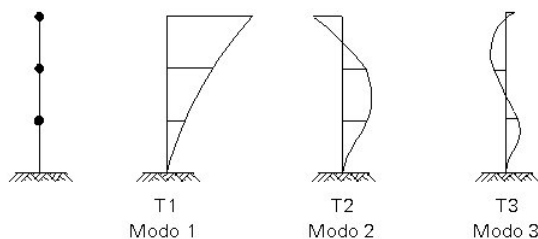
7.6 Método de Análise Multi-modal

Dado um sistema de vários graus de liberdade a “análise multi-modal” do mesmo começa pelo calculo dos modos de vibração do sistema e os respectivos T_n . Do espectro de pseudo- acelerações de projeto pode se obter a resposta associada a cada um dos modos, e para cada modo analisado por separado poderão se obter as solicitações, que serão as respostas modais associada a cada solicitação. Mediante uma metodologia de superposição se combinam as respostas. A metodologia de combinação é geralmente a da raiz quadrada da soma dos quadrados, e se aplica para momentos, cortantes, forças axiais, deslocamentos... Como consequência disso os esforços internos obtidos para dimensionamento e avaliação não estarão em equilíbrio. Se a diferença entre períodos modais consecutivos for menor que 10% terá que se adotar regras de combinação especiais.

A continuação, uma explicação mais detalhada da metodologia:

Etapa 0: Geração do espectro de projeto de acordo às diretivas da norma e de acordo aos dados particulares do projeto.

Etapa 1: Cálculo dos períodos próprios e das formas modais.



Etapa 2: Cálculo para cada modo do “peso efetivo modal” e do “fator de participação modal”.

Para cada modo se calcula o “peso efetivo modal”:

$$W^E = \frac{(\sum w_i \cdot \phi_i)^2}{\sum w_i \cdot \phi_i^2}$$

E o “fator de participação modal”:

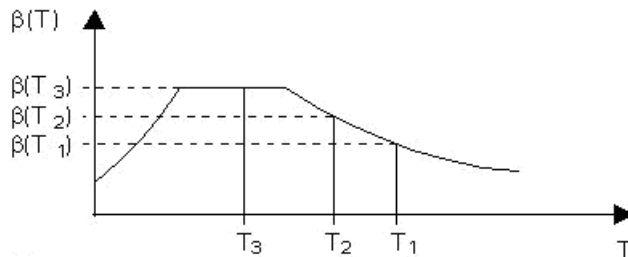
$$P = (\sum w_i \cdot \phi_i) / \sum w_i \cdot \phi_i^2$$

w_i são os pesos associados a cada coordenada i .

ϕ_i são os deslocamentos modais de cada coordenada i .

Se a soma dos “pesos efetivos modais for menor que 90 % do peso total da estrutura, deverá se agregar mais modos até ultrapassar essa porcentagem.

Etapla 3: Extração das respostas modais associadas aos períodos modais de acordo ao espectro de acelerações (pseudo- acelerações) de projeto.



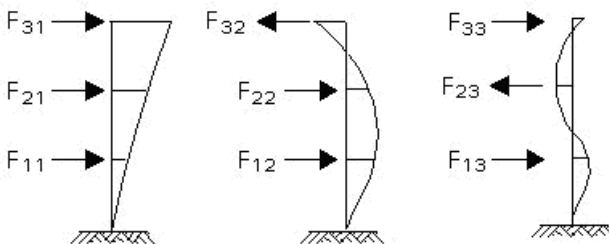
Etapla 4: Cálculo dos cortantes modais e das forças modais:

O cortante modal para cada modo é:

$$V_D = W^E \cdot \frac{\beta}{g}$$

As forças modais são proporcionais a $(w_i \phi_i)$ e a soma delas em cada modo deverão ser iguais ao cortante modal, ou seja que:

$$F_i = \frac{(w_i \phi_i)}{\sum (w_i \phi_i)} V_D$$



Etapla 5: Cálculo para cada modo (de acordo às forças modais) dos esforços relevantes para o dimensionamento.



Etapa 6: Resumo de esforços para dimensionado de acordo ao método de combinação modal.

$$M = \sqrt{M_{1b}^2 + M_{2b}^2 + M_{3b}^2}$$

7.7 Mitigação do dano sísmico e a eficiência da engenharia civil na mesma.

É usual definir os propósitos da Engenharia Civil referentes aos aspetos sismo – resistentes como:

- a) Prevenir dano estrutural e não estrutural para terremotos de menor intensidade.
- b) Prevenir danos estrutural e minimizar dano não estrutural para eventos de intensidade moderada.
- c) Impedir o colapso da estrutura para as máximas intensidades esperadas.

Mas os efeitos dos terremotos não são somente estruturais, também geram :

- a) Instabilidade do solo
- b) Vibração do solo que resulta em dano e até colapso de **estruturas**
- c) Vibração das estruturas que resulta em dano de **elementos não estruturais**.
- d) Vibração das estruturas que resultam em **incêndios**
- e) Liquefação
- f) Assentamentos diferenciais
- g) Espelhação Lateral (*lateral spreading*)
- h) Deslizamento de terra
- i) Tsunamis.
- j) Incremento do empuxo em muros de contenção que resultam em colapsos.
- k) Consequência de todos os efeitos: perda de vidas humanas, perdas econômicas e colapso funcional da sociedade.



Liquefação e “spreading” lateral devidos ao terremoto de Kobe.

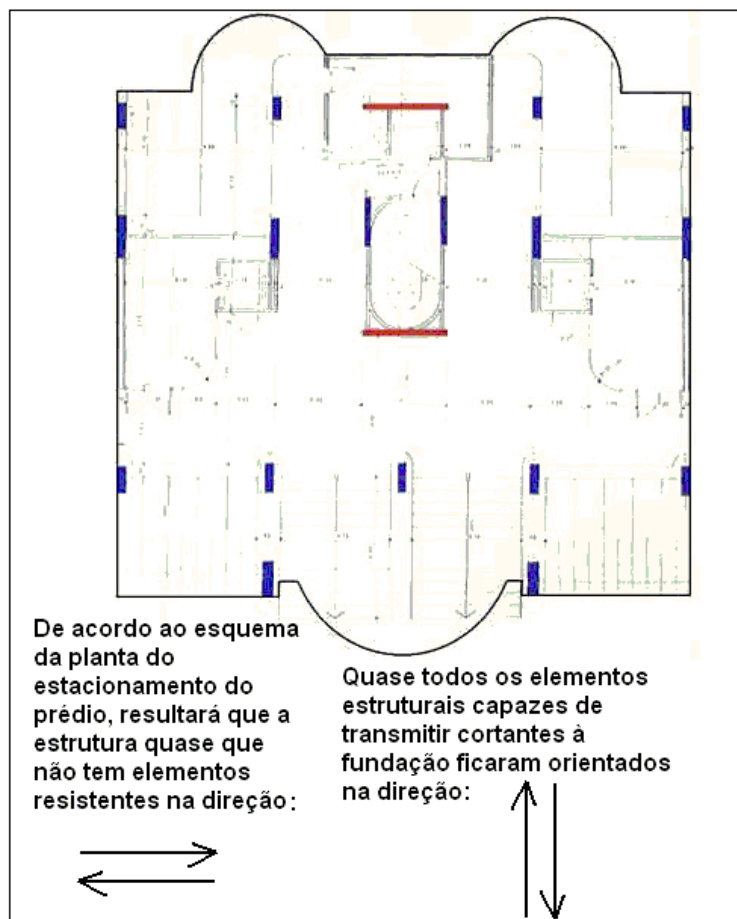
As manifestações do dano em estruturas de concreto armado devido a eventos sísmicos são:

- a) Desempenho inadequado da interfase fundação-solo.
- b) Fissuras de corte e flexão em vigas
- c) Excesso de compressão em pilares devido a flexão (consequência de qualidade deficiente do concreto)
- d) Falha de estribos de pilares que leva a flambagem das barras longitudinais de pilares
- e) Falhas de cortante em vigas e pilares
- f) Falhas de desempenho das conexão (pilar viga)
- g) Detalhamento inadequado da armadura (estribos, ancoragens, etc.)
- h) Colapso global de edifícios geralmente devido a aparição das manifestações anteriores que impediram o desenvolvimento de mecanismos de dissipação de energia por ciclos histeréticos (resposta não dútil da estrutura)

O ato do cálculo pelos engenheiros de acordo a normas não é suficiente para mitigar o dano global devido a eventos sísmicos. Mas ainda, cálculo “per-sé” nem pode dar cobertura à mitigação do dano estrutural quando os engenheiros não conseguem evitar as configurações indesejáveis que são justamente as que propiciam o desempenho inadequado das estruturas na maioria dos casos de colapsos acontecidos no passado:

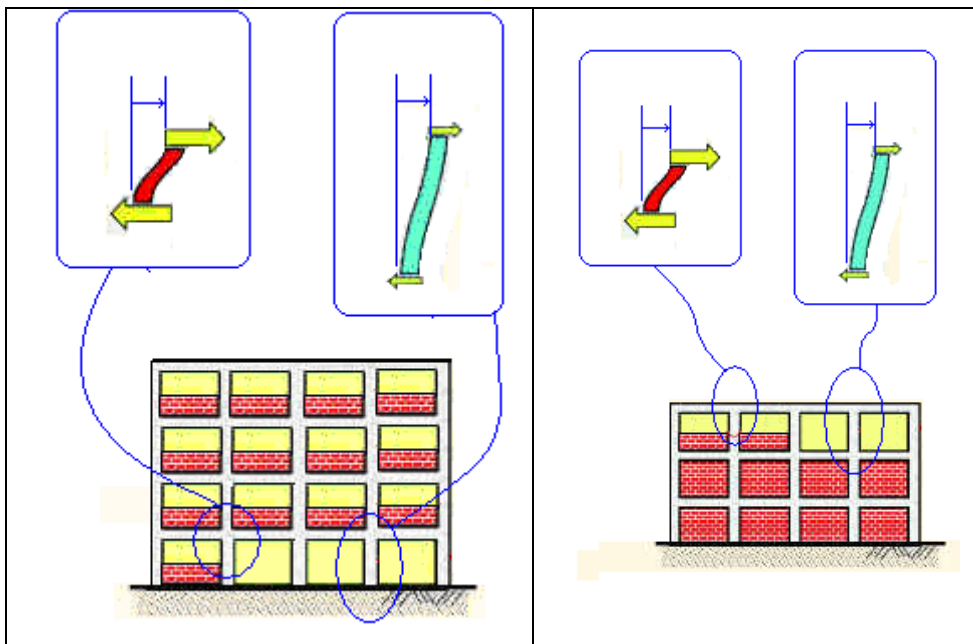
- a) Falta de elementos resistentes em uma das direções.
- b) Pilares curtos.
- c) Andares flexíveis (geralmente no térreo).
- d) Conexões: Pilar flexível- Viga rígida.
- e) Descontinuidades dos sistemas responsáveis da resistência a forças horizontais.
- f) Falta de simetria.
- g) Juntas insuficientemente largas (inter-hammering).

Obviamente, não poderá se esperar um bom desempenho das estruturas que não possuem elementos que forneçam rigidez para uma das direções das direções :



A falta de um sistema responsável pela estabilidade a forças horizontais pode ser visualizada com facilidade como no caso da figura. Obviamente, um projeto com essas características seria inaceitável em regiões com risco sísmico significativo.

A presença de pilares curtos (short columns) implica a concentração de cortantes elevados em pilares que apresentam rigidez maior devido à presença de paredes (que podem não ser estruturais):



Quando o pilar curto é gerado por um muro (ou parapeito) de concreto o engenheiro estruturalista poderá e deverá estar ciente da problemática já que com certeza ele fará os detalhes do mesmo. Um muro ou parapeito de alvenaria gera um pilar curto mesmo se o entrase não tem a missão de resistir forças no plano, ele estará atuando e sua resistência é geralmente suficiente para não quebrar sem rigidizar o pilar e gerar dano nele como mostram as fotos seguintes.

Muitas vezes os pilares curtos aparecem devido a necessidades arquitetônicas e funcionais relativas a iluminação e ventilação:



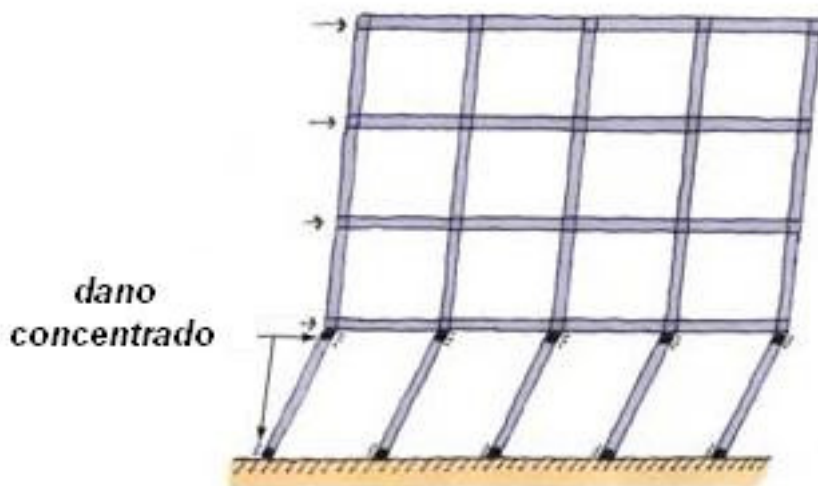
Terremotos em regiões urbanas sempre mostram que a presença de pilares curtos são inevitavelmente focos de dano estrutural e em muitos casos esse dano degenerou em colapso.

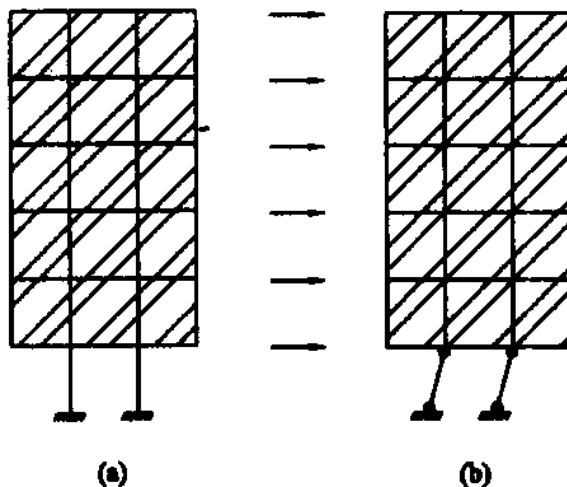






As necessidades da arquitetura urbana propiciam plantas de térreos com poucas vedações (para propósitos de uso público, estacionamentos, comerciais, etc.). Nesse tipo de configurações gera-se dano concentrado nos pilares do “andar flexível”.





Os danos devidos à presença do andar flexível também são sumamente freqüentes:

Na figura pode se apreciar o que aconteceu com um prédio de 2 andares em Guajarat (Índia) cujo térreo era flexível. “O prédio da figura tinha 2 andares”.



Quase 20 anos antes uma coisa parecida tinha acontecido nos EEUU com o 1º andar da unidade psiquiátrica do hospital Olive View:



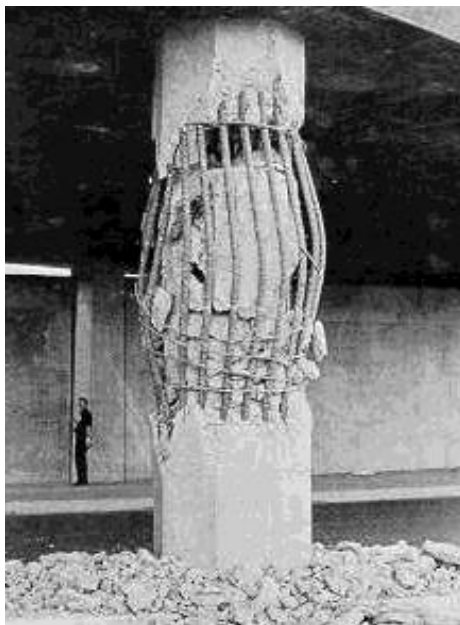
Os andares flexíveis e os pilares curtos são casos extremos nos quais a estrutura não consegue desenvolver nenhum mecanismo de ductilidade. Nos dois casos o colapso começa nos pilares (geralmente na vizinhança da conexão com as vigas). Algo similar acontece quando as vigas dos pórticos resultam bem mais rígidas que os pilares, como no exemplo da figura:



Aos efeitos de cargas horizontais que não ultrapassem o limite elástico de nenhum elemento estrutural a presença de vigas rígidas não empioraria a situação dos pilares. O dimensionamento sismo-resistente, como foi mencionado previamente, não pretende que a estrutura permaneça sem dano em eventos de alta intensidade, e o bom desempenho da estrutura está ligado diretamente ao “talento” da estrutura em gerar mecanismos de dissipação energética sem colapsar. A presença de vigas rígidas implica que o dano se produzirá nos pilares sem que as vigas tenham atingido o limite elástico. Sendo o pilar o elemento no qual o dano leva rapidamente à instabilidade (geralmente associado ao efeito P-delta pelos deslocamentos devidos à flexibilidade ocasionada pela aparição da rótula) o colapso da estrutura será atingido antes que o resto da estrutura apresente nenhum mecanismo de ductilidade.

As configurações mencionadas anteriormente são levadas em conta pelas normas mediante incrementos locais de cortantes. Nenhum aviso aparecerá na análise multimodal. Um erro muito comum é consequência de “esquecer” as diretivas normativas referentes a essas configurações. Deve se ressaltar que a redução das ordenadas espectrais presentes nas normas não se justificariam se a estrutura apresentar alguma destas configurações (já que elas impedem o desenvolvimento de processos de dissipação energética que neles se inspira a redução da resposta).

Outro aspecto importante é a realização de detalhes de armadura de acordo a diretivas cuja finalidade é justamente garantir a ductilidade da estrutura. Depois dos terremotos resulta comum visualizar marcadas conseqüência do detalhamento inadequado da armadura em especial no referente aos estribos dos pilares que na hora do evento sísmico são submetidos a cortante e se geram fissuras de corte e a armadura de cortante simultaneamente não consegue sujeitar adequadamente as barras verticais comprimidas (especialmente na vizinhança da fissura), o que degenera em flambagem das barras como pode se apreciar na figura:



A conjunção de efeitos associados a estribos inadequados de pilares e à presença de andares flexíveis, pilares curtos ou vigas rígidas acentuam a fragilidade dos pilares e a conseqüente fragilidade da estrutura que em muitos casos colapsa.:



As normas impedem levar em conta pórticos que apresentem conexões Pilar viga excêntricos:



Uma das problemáticas existentes no cumprimento das **normativas sísmo-resistentes** é resultado do fato que nem todas as diretivas que devem ser cumpridas estão incluídas explicitamente nas normas especializadas em sísmica.

Muitas das diretivas sísmicas relacionadas ao detalhamento de armadura são levadas em conta nas normas sísmicas mediante a exigência de ductilidade. Com certeza deve ser a norma de concreto armado que se ocupe de especificar e detalhar como deverá se fazer o projeto de armadura para que as mesmas tenham cobertura nas plantas de projeto.

Em muitos países nos quais as normas sísmicas são relativamente novas, carecem de normas de concreto armado adequadas às mesmas. O resultado é que são adotados coeficientes de redução da carga devido à ductilidade “generosos”, o que exigiria o respeito de diretivas ainda inexistentes nas normas de concreto. A consequência é a ineficiência da norma e o desempenho inadequado das estruturas.

Quando se fala da repercussão econômica e de complexidade de projeto e execução ligado à incorporação de normas sísmo-resistentes em projetos de concreto armado, deve ser levado em conta que as mesmas estarão principalmente nas normas de concreto (na necessidade de fornecer ductilidade) e não no relacionado estritamente às forças horizontais que a norma sísmica define.

7.8 Dano não estrutural

Sem restar da importância que o dano estrutural possui no cenário de um evento sísmico, resulta importante reconhecer que o dano “não associado ao colapso das estruturas” nem ao dano de elementos definidos como estrutura pode gerar prejuízo (também em vidas humanas) de grande importância.

A importância da mitigação do dano não estrutural adquiriu novo perfil depois do terremoto de Northridge quando 13 hospitais foram interditados devido a dano “não estrutural”, quando nenhum deles apresentava dano estrutural significativo.



Estatua de Louis Agassiz no Campus de Stanford depois do terremoto de 1906 em San Francisco

Incêndios, caída de vidros e revestimentos, e outros “colapsos não estruturais” são causas de dano muito significativo.

A sociedade espera que o engenheiro de estruturas seja quem proteja a mesma dos efeitos indesejáveis dos terremotos, mas na realidade parte dos danos estão associados a elementos que não são parte da responsabilidade dos mesmos.

Nas plantas de execução da estrutura não estarão detalhadas as tubulações de oxigênio do hospital, se elas não estiveram sujeitas adequadamente balancearão, baterão com outras tubulações quebrarão e darão origem ao colapso funcional do hospital ou a um incêndio.

Nenhum engenheiro é consultado quando no acesso a um prédio de importância crítica, o arquiteto decide instalar um elemento decorativo (estátua, lustre ou vitraux) que poderá cair, machucar pessoas e levar ao colapso funcional do edifício.

Inevitavelmente, a mitigação eficiente do dano sísmico deve exigir atenção especial também respeito a elementos não estruturais cuja responsabilidade foge do que geralmente é assumido como área de ingerência do engenheiro de estruturas.

A tarefa da mitigação do dano não estrutural deve começar com a triagem de todos os elementos não estruturais de acordo ao potencial efetivo de dano que eles apresentam desde a abertura de uma parede para a passagem de uma caneleira de ar condicionado que gerará um pilar curto que não foi levado em conta até a prateleira onde estão os medicamentos que serão imprescindíveis nas primeiras horas depois do evento.

A triagem deve levar à edição de regras simples que possam ser cumpridas sem a necessidade de intervenção de profissionais especializados até os casos que exijam um cálculo detalhado.

Deve ser destacado que a avaliação da estabilidade de elementos não estruturais pode exigir às vezes a aplicação de metodologias não triviais, como ser o cálculo de “espectros de aceleração do andar” (floor spectra) que dependem da configuração da estrutura que sustenta o elemento e que muitas vezes é confundido com o espectro de pseudo-aceleração.

Em termos de “custo-benefício”, a mitigação não estrutural possui um “retorno” vantajado respeito à mitigação estrutural, especialmente no relacionado com reforços de edifícios existentes.

Anexo A. Excentricidades típicas de rotores

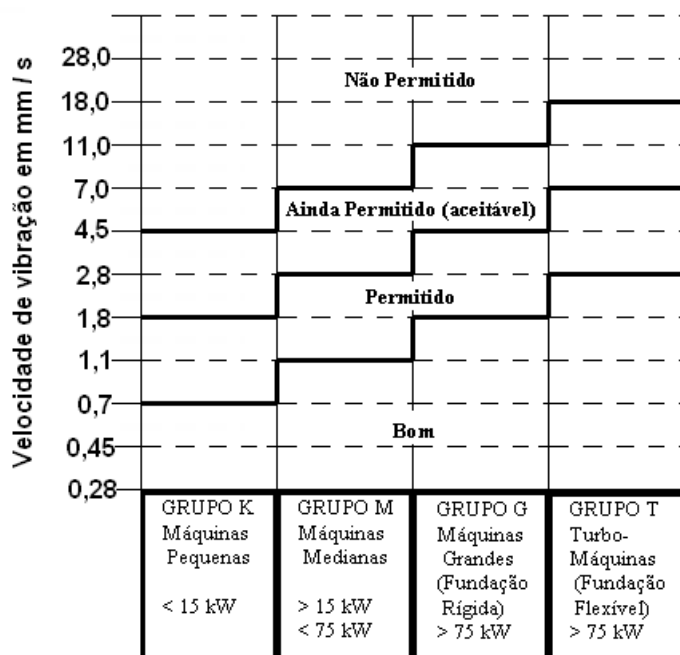
Excentricidades típicas de rotores (valores de referência)

Tipo de Máquina	Frequência	Frequência	Período	Frequência Angular	Estimativa de e
	[RPM]	[Hz]	[s]	[Rad/s]	mm
Maquinas Centrifugas Gerais	750	12.5	0.08	78.5	0.18 to 0.82
	1500	25.0	0.04	157.0	0.10
	3000	50.0	0.02	314.0	0.03
Para Compressores (API)	RPM	f = RPM/60	T = 60/RPM	$\omega = \text{RPM}/9.55$	$\sqrt{(7.74/\text{RPM})}$ <0.0254
Motores elétricos	<1000	<17	>0.06	<105	0.0318
	1000 to 1500	17 to 25	0.04 to 0.06	105 to 157	0.0254
	1500 to 3000	25 to 50	0.02 to 0.04	157 to 314	0.0191
	3000 to 4000	50 to 67	0.015 to 0.02	314 to 419	0.0127
Motores de Indução	<1000	<17	>0.06	<105	0.0381
	1000 to 1500	17 to 25	0.04 to 0.06	105 to 157	0.0318
	1500 to 3000	25 to 50	0.02 to 0.04	157 to 314	0.0254
	3000 to 4000	50 to 67	0.015 to 0.02	314 to 419	0.0127

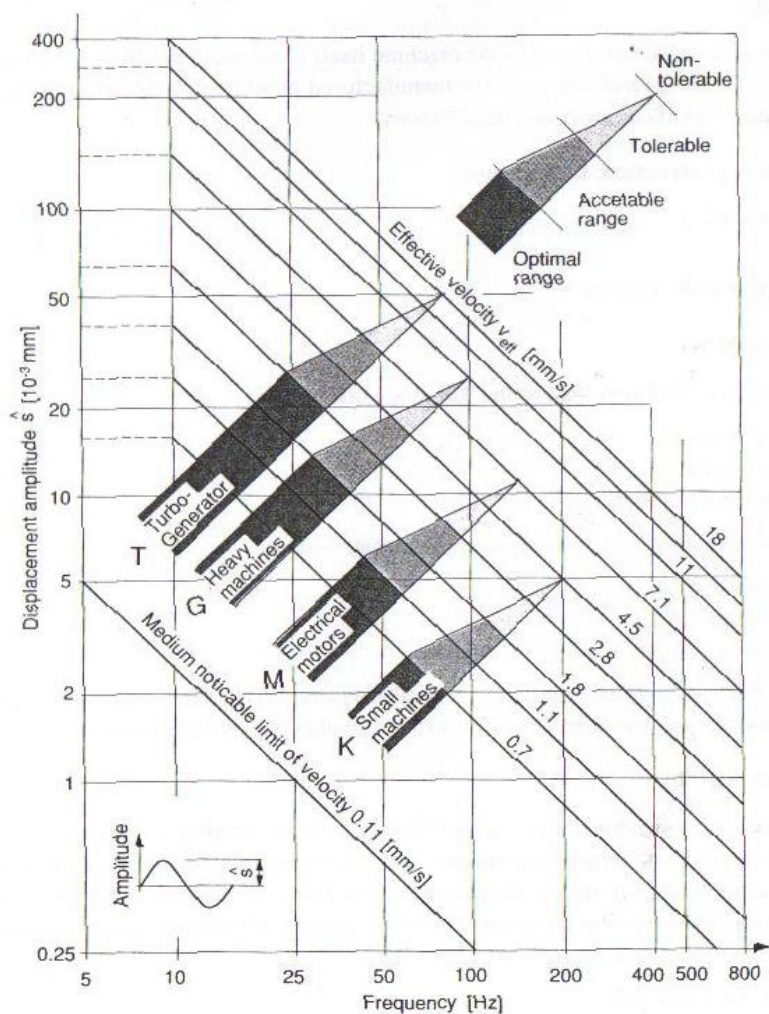
Anexo B. Tabelas de referência para qualificar o nível de resposta de maquinarias

B.1. VDI 2054

- A norma VDI 2056/1964 foi desenvolvida na Alemanha na base dos estudos feitos por Rathbones. A faixa de frequências do escopo das diretivas da VDI 2056/1964 vai desde 10 Hz até 1000 Hz. Os valores das normas BS 4675 e ISO 2372 são idênticas a VDI 2054



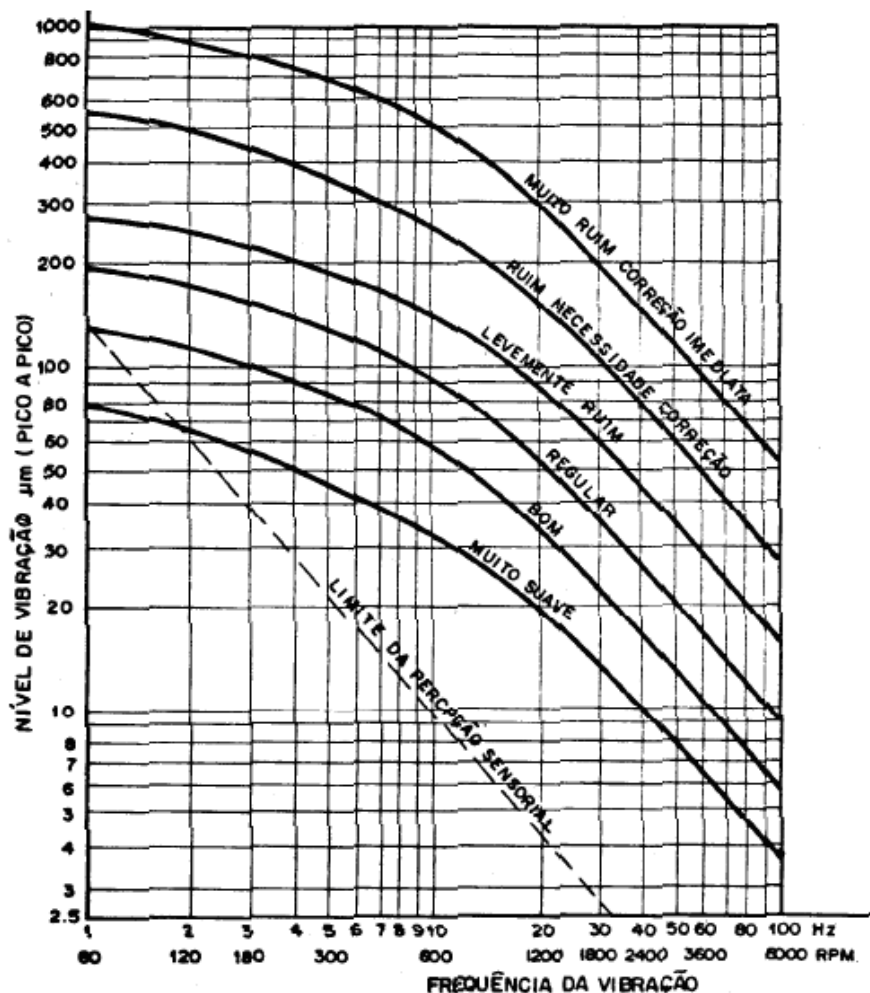
Limites gerais de velocidade de vibração para maquinárias de acordo a VDI 2056



Effective velocity levels for operation of different machines (according to [VDI 2056])

B.2. Rathbone Chart

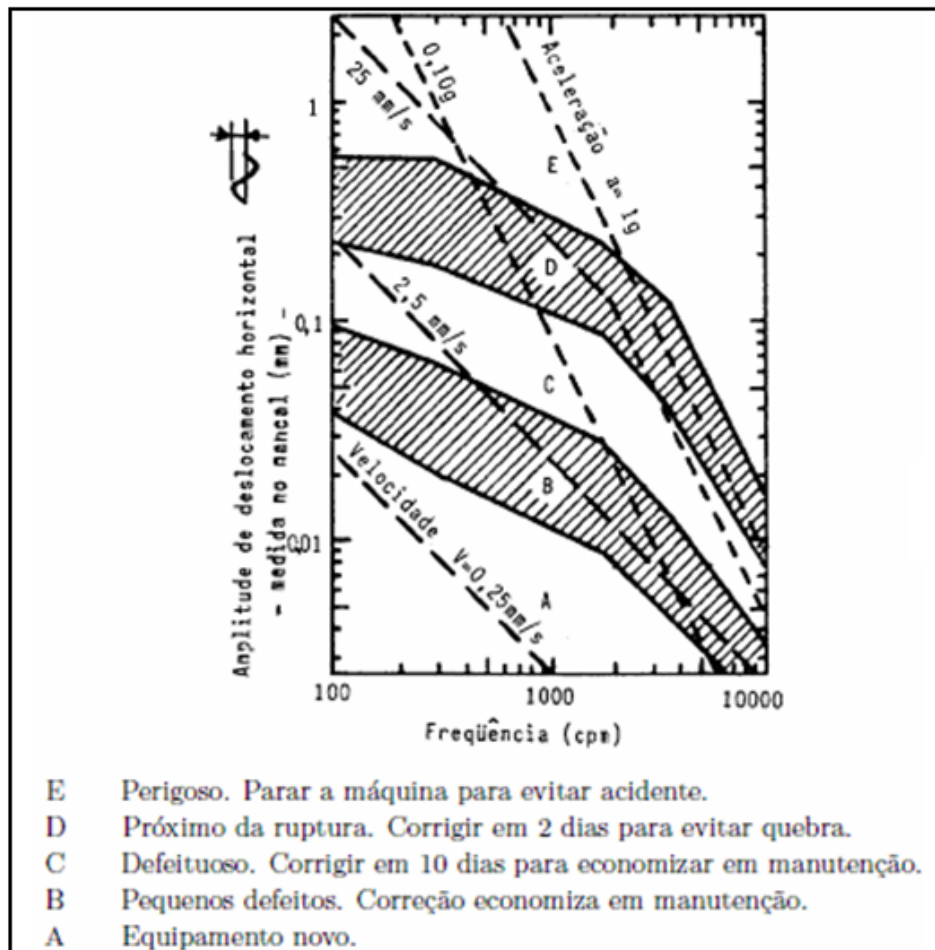
B.2- “Rathbone Chart” foi elaborada por T.C. Rathbone no ano 1939. Ele expressou as velocidades pico a pico relacionadas a diferentes graus de desempenho funcional das máquinas para diferentes frequências operacionais. O interesse é basicamente como referencia histórica.



Carta de Severidade de Rathbone

B.3. Michael Blake

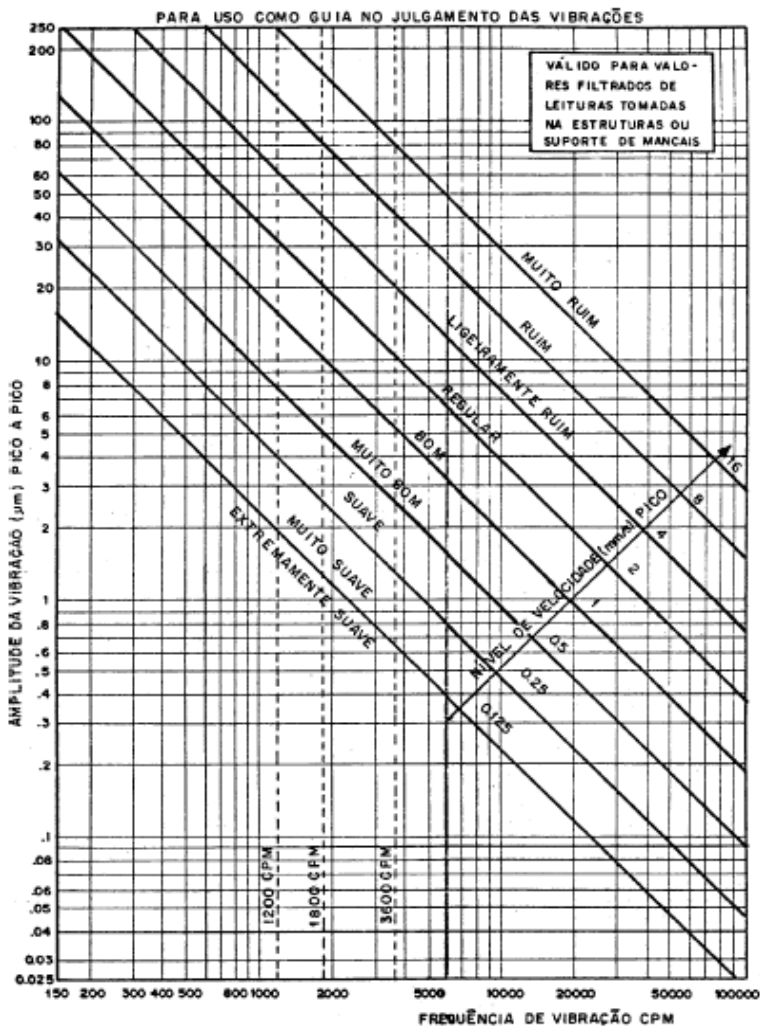
Na década de 1960, Michael Blake publicou uma versão melhorada da Carta de Rathbones. Nela Blake separou as regiões de desempenho em faixas de 10 dB para frequências de 5 Hz até 10000 Hz.



Critério de Blake para a qualificação de aceitabilidade da vibração de máquinas rotativas

B.4. Norma IRD

A norma IRD expressa os valores em termos de flutuação pico a pico de velocidades. Seus valores são duvidosos como referencia válida para certas faixas de velocidades e de cargas.



Carta de Severidade IRD

Anexo C. Níveis de Percepção Humana de Vibrações

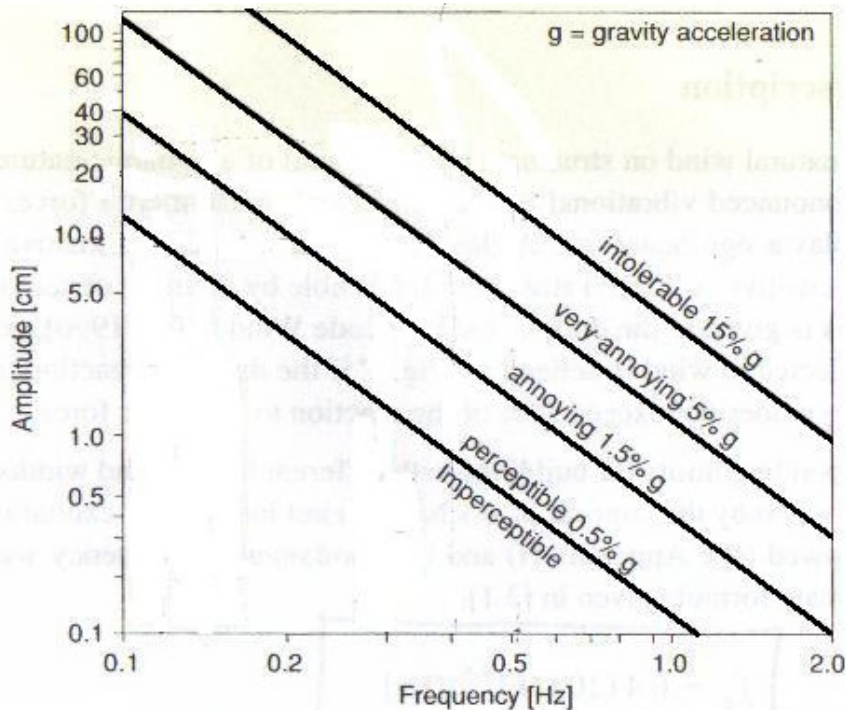
Níveis de Percepção Humana de Vibrações – Níveis Aceitáveis de Vibrações aos quais seres humanos estão submetidos em diferentes cenários

C.1. Níveis de percepção humana de vibrações. Os valores indicados são acelerações pico para pessoas paradas submetidas a vibrações verticais

Description	Frequency range 1 to 10 Hz Peak acceleration [mm/s ²]	Frequency range 10 to 100 Hz Peak velocity [mm/s]
just perceptible	34	0.5
clearly perceptible	100	1.3
disturbing/unpleasant	550	6.8
intolerable	1800	13.8

*Table I.1 : An indication of human perceptibility thresholds for vertical harmonic vibrations (person standing).
Data combined from various authorities. There is scatter by a factor of up to about 2 on the values given*

C.2. ISO 2631-2 - Acelerações pico máximas recomendadas para conforto humano.

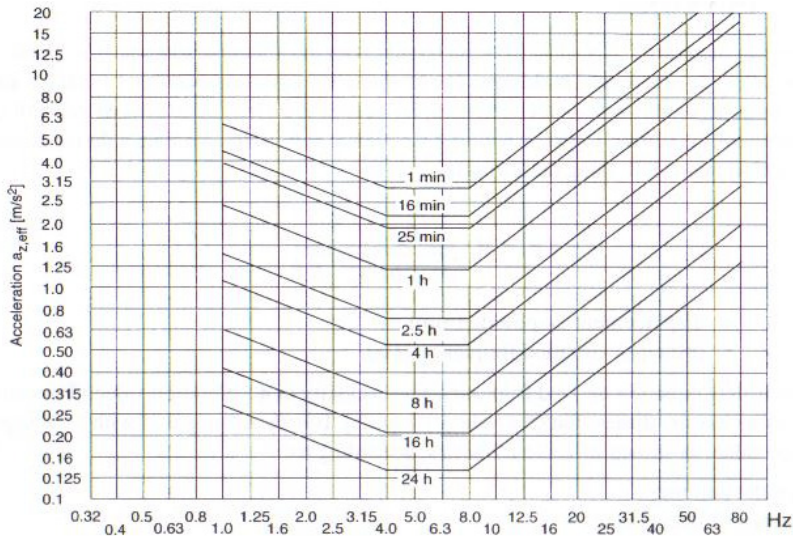


Percepção humana de vibrações originadas pelo vento

“Vibration problems in Structures”- H Bachmann

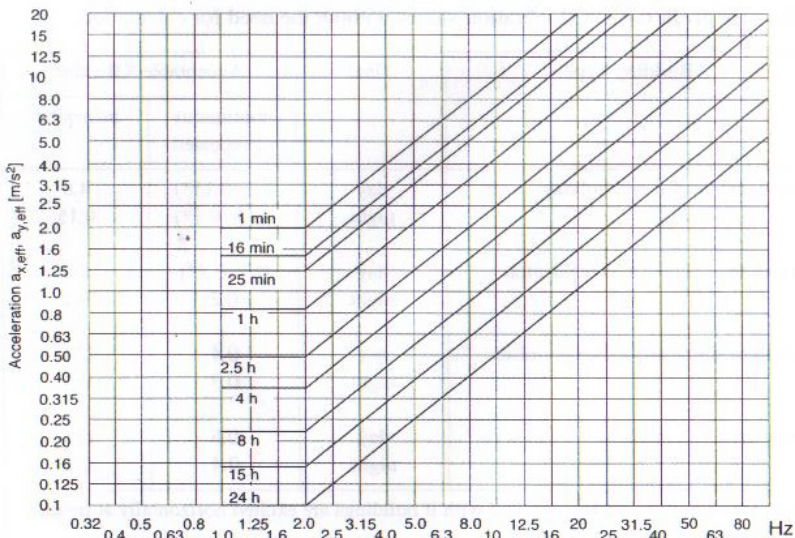
C.3. ISO 2631-1

ISO 2631-1: Limites de tempo de exposição a vibrações longitudinais aos efeitos de evitar sensação de fadiga. Para evitar desconforto, os limites de tempo de exposição devem ser 3,15 vezes menores.



C.4. ISO 2631-1

ISO 2631-1: Limites de tempo de exposição a vibrações transversais aos efeitos de evitar sensação de fadiga. Para evitar desconforto, os limites de tempo de exposição devem ser 3,15 vezes menores.



C.5. DIN 4150-4

Valores máximos aceitáveis de amplitude da velocidade (em mm /s) de acordo a DIN 4150-4

Finalidade do edifício	Para nível de fundação			No andar superior (para qualquer frequência)
	1Hz <f<10Hz	10Hz<f<50 Hz	50Hz<f<100Hz	
Comercial, industrial	20 mm/s	20 mm/s a 40 mm/s	40 mm/s a 50 mm/s	40 mm/s
Moradia	5 mm/s	5 mm/s a 15 mm/s	15 mm/s a 20 mm/s	15 mm/s
Hospitais, Bibliotecas (e outros tipos de funções que exigem limitação especial de níveis de vibração)	3 mm/s	3 mm/s a 8 mm/s	8 mm/s a 10 mm/s	8 mm/s

Anexo D. Valores recomendados para serem empregados na avaliação funcional de Efeitos de Atividades Humanas

Frequências Características de Atividades Humanas e valores a serem adotados de acordo aos diferentes tipos de estruturas

Representative types of activity			Range of applicability	
Designation	Definition	Design activity rate [Hz]	Actual activities	Activity rate [Hz]
"walking"	walking with continuous ground contact	1.6 to 2.4	- slow walking (ambling) - normal walking - fast, brisk walking	~ 1.7 ~ 2.0 ~ 2.3
"running"	running with discontinuous ground contact	2.0 to 3.5	- slow running (jog) - normal running - fast running (sprint)	~ 2.1 ~ 2.5 > 3.0
"jumping"	normal to high rhythmical jumping on the spot with simultaneous ground contact of both feet	1.8 to 3.4	- fitness training with jumping, skipping and running to rhythmical music - jazz dance training	~ 1.5 to 3.4 ~ 1.8 to 3.5
"dancing"	approximately equivalent to "brisk walking"	1.5 to 3.0	social events with classical and modern dancing (e.g. English Waltz, Rumba etc.)	~ 1.5 to 3.0
"hand clapping with body bouncing while standing"	rhythmical hand clapping in front of one's chest or above the head while bouncing vertically by forward and backward knee movement of about 50 mm	1.5 to 3.0	pop concerts with enthusiastic audience	~ 1.5 to 3.0
"hand clapping"	rhythmical hand clapping in front of one's chest	1.5 to 3.0	classical concerts, "soft" pop concerts	~ 1.5 to 3.0
"lateral body swaying"	rhythmical lateral body swaying while being seated or standing	0.4 to 0.7	concerts, social events	~ 1.5 to 3.0

Table G.1: Representative types of activities and their applicability to different actual activities and types of structures

Anexo E. Unidades logarítmicas de amplitude vibracional

A escala em decibéis para velocidades está definida de maneira logarítmica a partir de um valor de referência V_{ref} suficientemente baixo, para o qual se associa o valor 0 decibel. Uma velocidade V_1 terá associado um valor em decibéis

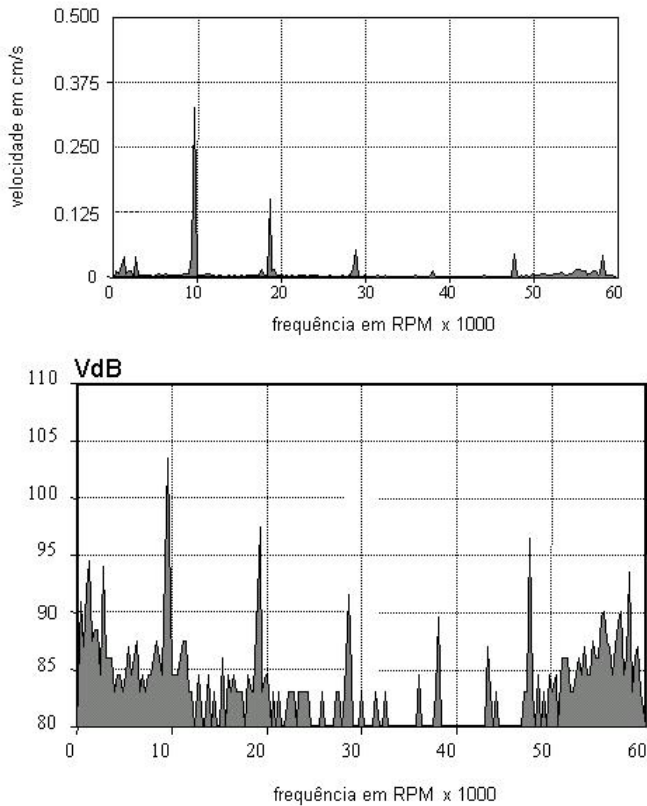
$$20 \log_{10}(V_1/V_{ref})$$

O decibel se usa para designar amplitudes de vibração e se emprega tanto para deslocamentos, velocidades e acelerações. Quando se refere a velocidades se usa a abreviatura V_{dB} e geralmente a velocidade de referência é o definido pelo Sistema Internacional : uma milésima de micrometro por segundo (0,001 $\mu\text{m/s}$). Ou seja, que em geral pode se dizer que o valor em V_{dB} associado a uma velocidade v será:

$$V_{dB} = 20 \log \frac{v}{10^{-9} \text{ m/s}}$$

A armada e diversas indústrias dos EEUU usam o valor de referencia das velocidades (associada a 0 dB) como uma centésima de micrometro por segundo (0,01 $\mu\text{m/s}$). Com isso os valores assinados com um mesmo valor V_{dB} nos EEUU resultam maiores em 20 V_{dB} .

A vantagem de usar as unidades V_{dB} é muito discutível. Existe uma vantagem clara na visualização de picos espectrais baixos:



Deve se ter cuidado especial na interpretação das ordenadas já que nas escalas logarítmicas as diferenças representam o que seriam quocientes entre os valores em escalas proporcionais. Uma medida que for maior em 20 V_{dB} que outra resulta ser 10 vezes maior. Uma medida maior em 6 V_{dB} será o duplo.

Observe-se que uma vibração com frequência 159,2 Hz, terá uma frequência angular de 1000 Rad /s Ou seja que uma vibração cuja amplitude de velocidade seja $\underline{h}$ m/s , resultará numa amplitude de aceleração $\underline{1000h}$ m/s² e numa amplitude de deslocamento de $h/1000$ m.

A definição dos valores de referencia das escalas em decibéis para deslocamentos (DdB) e acelerações (AdB) são feitas de maneira que na frequência de 159,2 Hz (1000 Rad /s) as quantidades: AdB, VdB e DdB coincidam.

Dessa maneira, as relações entre as quantidades para uma certa frequência f dada em Hz serão:

$$V_{dB} = A_{dB} - 20 \log(f) + 44 = D_{dB} + 20 \log(f) + 24$$

$$D_{dB} = A_{dB} - 40 \log(f) + 20$$

A passagem de decibéis a unidades métricas pode ser efetuada mediante as fórmulas:

$$v(m/s) = 10^{\frac{V_{dB} - 180}{20}} \qquad a(g) = 10^{\frac{A_{dB} - 120}{20}}$$

Anexo F. Revisão de diretivas de verificação de fadiga de acordo à Norma ABNT NBR 6118-2003

Revisão de diretivas de verificação de fadiga de acordo à Norma ABNT NBR 6118-2003 e introdução à aplicação dos mesmos em projetos de estruturas submetidas a excitações dinâmicas

F.1. .Revisão de parâmetros básicos

(na suposição que se esteja empregando concreto C30).

F.1.1. Concreto

$$C30 \rightarrow f_{ck} = 30 \text{ MPa} = 300 \text{ kgf/cm}^2$$

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = 30 / 1.4 = 21.4 \text{ MPa} = 214 \text{ kgf/cm}^2$$

$$f_{ct,m} = 0.3 (f_{ck})^{2/3} = 2.9 \text{ MPa} = 29 \text{ kgf/cm}^2$$

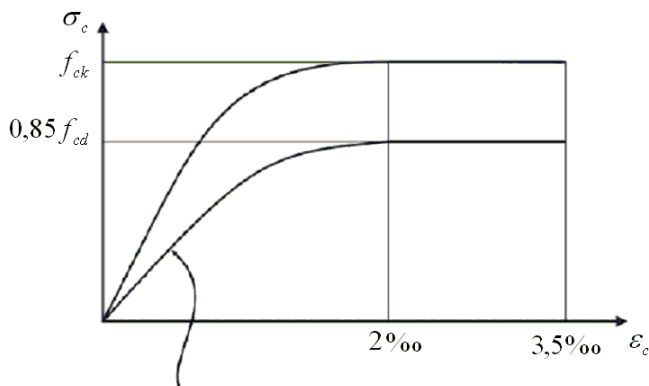
$$f_{ct,inf} = 0.7 * f_{ct,m} = 20 \text{ kgf/cm}^2$$

O Módulo de Young para cargas dinâmicas é maior mais aos efeitos do cálculo resulta uma boa aproximação trabalhar com os módulos estáticos. Para esforços reduzidos pode se adotar para maior exatidão: A aderência à armadura pode assumir-se também a mesma.

$$E_{ci} = 5600 (f_{ck})^{1/2} = 30670 \text{ MPa} = 3.0 * 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$E_{ci} = 5600 (f_{ck})^{1/2} = 30670 \text{ MPa} = 3.0 * 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$E_{cs} = 0.85 E_{ci} = 26070 \text{ MPa} = 2.6 * 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$



$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_c}{2\text{‰}} \right)^2 \right]$$

F.1.2. Armadura

$$\text{CA50 } f_{yk} = 500 \text{ MPa} = 5000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 5000 / 1.15 = 4350 \text{ kgf/cm}^2$$

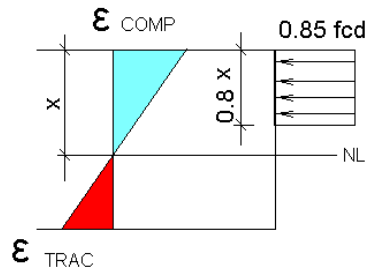
$$E_s = 210 \text{ GPa} = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$(\text{CA-50 } \varepsilon_{yd} = 0.2 \% = 0.002)$$

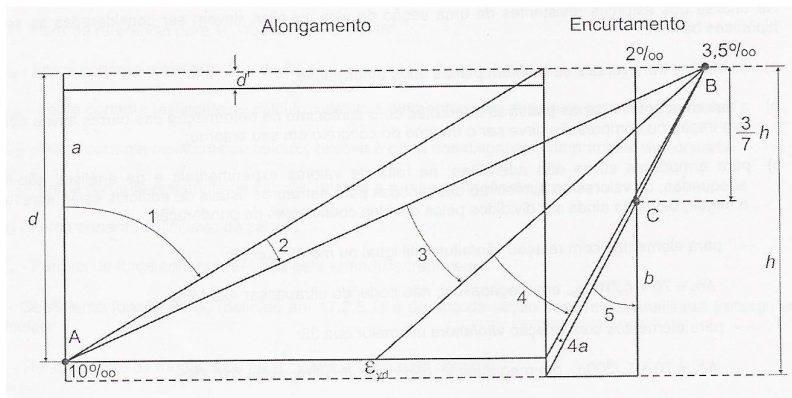
F.2. Revisão dos estados de carga normativos.

F.2.1. Estado Limite Último ELU ($\gamma_f = 1.4$)

- Bernoulli
- Deformação da armadura passiva similar à do concreto em contato.
- Não se leva em conta a contribuição do concreto comprimido.
- Configuração do concreto comprimido :



e) Estado de deformações associadas ao ELU:



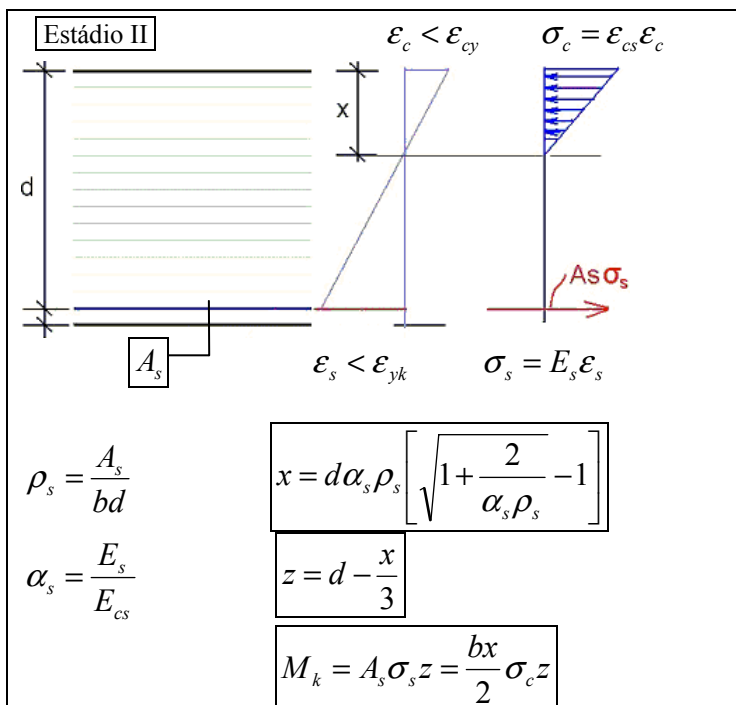
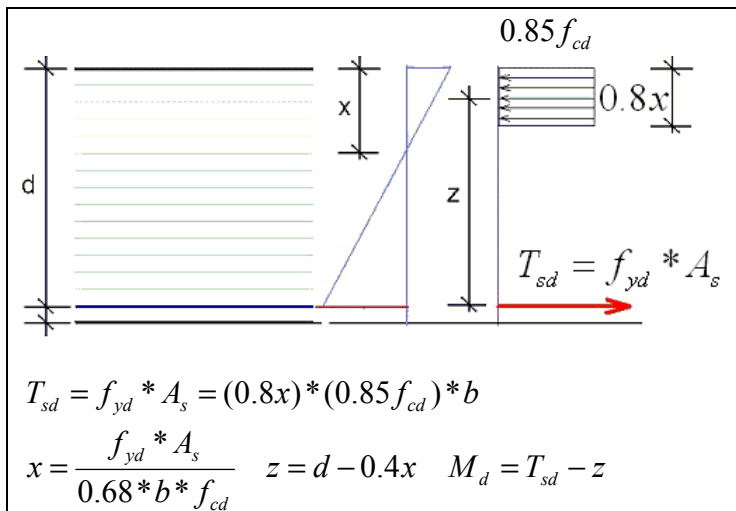
Para uma seção retangular:

Para $\epsilon_s = 0.2\%$ resulta $x=0.63 d$, $z=0.75d$

$$M_d = M_{d, \max} = (0.68 * b * f_{cd}) * (0.63d) * (0.75d) = 0.32 * b * d^2 * f_{cd}$$

$$A_s(M_{d, \max}) = 0.43 * b * d * (f_{cd} / f_{yd})$$

F.2.2. Estado Limite de Serviço ELS ($\gamma_f = 1.0$)



Para CA-50 e C30 :

$$\alpha_s = 2.1 * 10^6 / (2.6 * 10^5) = 8.08$$

F.2.3. Estado limite de Fadiga

F.2.3.1. Verificação do Concreto

Condição para a verificação em fadiga do concreto comprimido (ABNT NBR 6118:2003 : ELS and $\alpha_s = 10$)

$$\eta_c \gamma_f \sigma_{c,\max} < f_{cd,fad} = 0.45 * f_{cd} ; \gamma_f = 1$$

$$\sigma_{c,\max} < f_{cd,fad} = 0.45 * f_{cd} / \eta_c$$

ABNT NBR 6118:2003

onde:

η_c é um fator que considera o gradiente de tensões de compressão no concreto;

$|\sigma_{c1}|$ é o menor valor, em módulo, da tensão de compressão a uma distância não maior que 300 mm da face sob a combinação relevante de cargas (figura 23.1);

$|\sigma_{c2}|$ é o maior valor, em módulo, da tensão de compressão a uma distância não maior que 300 mm da face sob a mesma combinação de carga usada para cálculo de $|\sigma_{c1}|$ (figura 23.1).

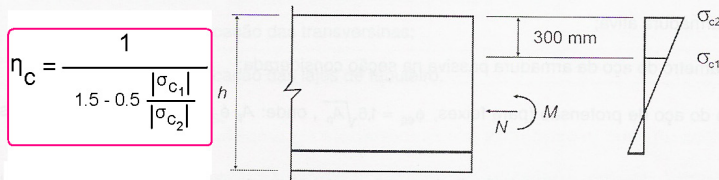


Figura 23.1 - Definição das tensões σ_{c1} e σ_{c2}

F.2.3.2. Verificação da Armadura

$$\gamma_f \Delta \sigma_s < \Delta f_{sd,fad}$$

ABNT NBR 6118:2003

Tabela 23.2 - Parâmetros para as curvas S-N (Woeller) para os aços dentro do concreto¹⁾

Armadura passiva, aço CA-50									
Valores de $\Delta f_{sd,fad,min}$, para 2×10^6 ciclos									
MPa									
Caso	ϕ mm								Tipo ²⁾
	10	12,5	16	20	22	25	32	40	
Barras retas ou dobradas com $D \geq 25 \phi$	190	190	190	185	180	175	165	150	T ₁
Barras retas ou dobradas com: $D < 25 \phi$ $D = 5 \phi < 20 \text{ mm}$ $D = 8 \phi \geq 20 \text{ mm}$	105	105	105	105	100	95	90	85	T ₁
Estribos $D = 3\phi \leq 10 \text{ mm}$	85	85	85	-	-	-	-	-	T ₁
Ambiente marinho Classe IV	65	65	65	65	65	65	65	65	T ₄
Barras soldadas (incluindo solda por ponto ou das extremidades) e conectores mecânicos	85	85	85	85	85	85	85	85	T ₄

Tabela 23.3 - Tipos da curva S-N

Tipo	N^*	k_1	k_2
T ₁	10^6	5	9
T ₂	10^6	3	7
T ₃	10^6	3	5
T ₄	10^7	3	5

A função da resistência à fadiga para o aço, representada em escala log.log (ver figura 23.2), consiste em segmentos de reta da forma $(\Delta f_{sd,fad})^m \times N = \text{constante}$.

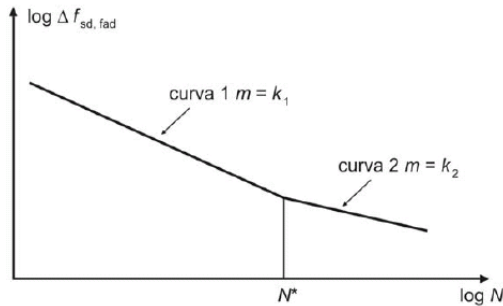


Figura 23.2 - Formato das curvas de resistência característica à fadiga (curvas S-N) para o aço

F.2.3.3. Verificação da fadiga no estado limite de serviço (efeito de amplificação de deformações)

$$a_n = a_1 \left\{ 1.5 - 0.5e^{(-0.05n^{0.25})} \right\}$$

a_n = deformação depois de n ciclos

a_1 = deformação resultante do 1º ciclo

F.2.3.4. Exemplo de laje h=150cm em flexão pura

F.2.3.4.1. Estádio I

Momento associado à primeira fissura

$$m_r = (100 * 150^2 / 6) * (fct,m) = 375000 * 20 = 75 * 10^5 \text{ kgf.cm/m} = 75 \text{ tf.m/m}$$

F.2.3.4.2. Armadura necessária de acordo a ELU (h=150 cm, d=140 cm)

$$A_{s,min} = 0,00173 * 100 * 140 = 24.22 \text{ cm}^2/\text{m} \sim 25 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{s,máx} \text{ (ELU)} = 0.43 * 100 * 140 * 214/4350 = 296 \text{ cm}^2/\text{m} \sim 300 \text{ cm}^2/\text{m}$$

(Não se leva em conta a contribuição da armadura comprimida)

Momento admissível **Mk,all** em função da seção de armadura A_s

$$Mk_{s,all} = 4.35 * A_s * (1 - 8.6 * 10^{-4} A_s) ; [Mk_{s,all}] = \text{tf.m/m} , [A_s] = \text{cm}^2/\text{m}$$

A_s	Tsd	x (ELU)	z(ELU)	Md,all	Mk,all
cm ² /m	t/m	cm	cm	tm/m	tm/m
25(Φ25.4@20)	109	7.5	137	149	106
28.6 (Φ25.4@17.5)	124	8.6	137	170	121
33 (Φ25.4@15)	144	9.9	136	196	140
40(Φ25.4@12.5)	174	12	135	235	167
50 (Φ25.4@10)	218	15	134	292	209
75	326	22.5	131	427	305
100	435	30	128	557	398
125	544	37.5	125	680	485
150	655	45	122	799	570
175	761	52.5	119	883	630
200	870	60	116	1,009	720
225	979	67.5	113	1,106	790
250	1,088	75	110	1,197	855
275	1,197	82.5	107	1,280	914
300	1,305	90	104	1,360	970

F.2.3.4.3. Esforços no aço e no concreto em ELS para as quantias de armadura calculadas de acordo ao ELU (h=150 cm, d=140 cm)

$$\alpha_s = 10 , d=140\text{cm} ; \rho_s = A_s / (14,000)$$

A_s	ρ_s	x (ELS)	z(ELS)	Mk	σ_c	σ_s
cm ² / m	cm ² / cm ²	cm	cm	tm/m	Kg/cm ²	Kg/cm ²
25(Φ25.4@20)	0.0018	24	132	80	51	2,424
25(Φ25.4@20)	0.0018	24	132	106	67	3,212
28.6 (Φ25.4@17.5)	0.0020	25	132	121	73	3,205
33 (Φ25.4@15)	0.0024	28	131	140	78	3,240
40(Φ25.4@12.5)	0.0029	30	130	167	86	3,211
50 (Φ25.4@10)	0.0036	33	129	209	99	3,240
75	0.0054	39	127	305	123	3,202
100	0.0071	44	125	398	146	3,184
125	0.0089	48	124	485	163	3,129
150	0.0107	51	123	570	180	3,090
175	0.0125	55	122	630	190	2,951
200	0.0143	57	121	720	207	2,975
225	0.0161	60	120	790	219	2,925
250	0.0179	62	119	855	230	2,874
275	0.0196	64	119	914	238	2,793
300	0.0214	66	118	970	246	2,740

F.2.3.4.4. Verificação em fadiga da compressão do concreto

$$f_{cd, fad} = 0.45 * f_{cd} = 0.45 * 214 = 96 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

$$\eta_c \gamma_f \sigma_{c, \max} = \eta_c \sigma_{c, \max}$$

Para $x < 30$ $\sigma_{c1 \sim 0}$, $\rightarrow \eta_c = 0.67$

Se $x > 30$ $\sigma_{c1} = \frac{\sigma_{c, \max}}{(1 - 30/x)}$, $\rightarrow \eta_c = \frac{1}{(1 + 15/x)}$

A_s	M_k	x (ELS)	η_c	σ_c	$\eta_c \gamma_f$ $\sigma_{c,m\acute{a}x}$	$f_{cd,fad}$
cm ² /m	tf.m/m	cm		kgf/cm ²	kgf/cm ²	
25(Φ25.4@20)	80	24	0.67	51	34	O.K. $<$ $f_{cd,fad}$
25(Φ25.4@20)	106	24	0.67	67	45	
28.6 (Φ25.4@17.5)	121	25	0.67	73	49	
33 (Φ25.4@15)	140	28	0.67	78	52	
40(Φ25.4@12.5)	167	30	0.67	86	58	
50 (Φ25.4@10)	209	33	0.69	99	68	
75	305	39	0.72	123	88	X
100	398	44	0.75	146	110	
125	485	48	0.76	163	124	
150	570	51	0.77	180	139	
175	630	55	0.79	190	150	
200	720	57	0.79	207	163	
225	790	60	0.80	219	175	
250	855	62	0.80	230	184	
275	914	64	0.81	238	193	
300	970	66	0.81	246	199	

Conclusão: Se estou precisando de menos que 75 cm²/m de armadura (de acordo ao ELU) não terei problemas de fadiga no concreto.

F.2.3.4.5. Verificação da armadura em fadiga

$$\gamma_f \Delta \sigma_s < \Delta f_{sd,fad}$$

$$\gamma_f = 1$$

Assumindo que $\Delta \sigma_s = \sigma_s \rightarrow$ a condição vira $\sigma_s = \Delta f_{sd,fad}$

Muitas vezes a avaliação exige levar em conta discriminadamente os aspectos operacionais da instalação aos efeitos de chegar a conclusões certas. Na medida em que a estrutura seja excitada por diferentes maquinarias com tempo de operação parcial, frequências, simultaneidade, e nível de solicitação diferenciadas, a análise pode chegar a exigir levar em conta efeitos em diferentes níveis de tensões para inferir a vida útil associada a cada quantia possível de armadura.

Para Φ=25mm →

$$\Delta f_{sd,fad} \quad (2 \text{ E}+6 \text{ ciclos}) = 175 \text{ MPa} = 1,750 \text{ kgf/cm}^2$$

Da curva S-N curve para $N > 2\text{E}+6$ ciclos $K_2=9$

$$\{\Delta f_{sd,fad} \quad (N \text{ ciclos})\}^9 * N = \{\Delta f_{sd,fad} \quad (2\text{E}+6 \text{ ciclos})\}^9 * 2 * 10^6$$

$$\{\Delta f_{sd,fad} \quad (N \text{ ciclos})\}^9 = (1/N) * 2 * 10^6 (175 \text{ MPa})^9$$

$$\Delta f_{sd,fad} \quad (10 \text{ E}+6) = 146 \text{ MPa} = 1,460 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\Delta f_{sd,fad} \quad (20 \text{ E}+6) = 135 \text{ MPa} = 1,350 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\Delta f_{sd,fad} \quad (40 \text{ E}+6) = 125 \text{ MPa} = 1,250 \text{ kgf/cm}^2$$

De acordo a 2.3.4.3, tínhamos que a quantia de armadura calculada de acordo a ELU resultava em solicitações na armadura no ELS de até 3,240 kgf/cm².

Sugestão de estratégia para simplificar o dimensionamento da armadura:

Aos efeitos de simplificar os cálculos e dar cobertura as necessidades da verificação em fadiga pode se usar o artifício de “penalizar” a quantia de armadura (na hora de calcular ela no ELU) incrementando a mesma uniformemente (como se for um coeficiente de majoração suplementar r_{fad} que para o nosso exemplo seria:

$$r_{fad} = 3,240 / \Delta f_{sd,fad}$$

Ou seja, que geramos um $\gamma_{f \text{ mod}}$:

$$\gamma_{f \text{ mod}} = 1.4 r_{fad}, \text{ em lugar do } \gamma_f = 1.4$$

$\gamma_{f \text{ mod}}$ terá valores diferentes de acordo aos ciclos de carga que se estima que acontecerão durante a vida útil da estrutura.

Para o nosso exemplo:

N	ELU $\gamma_{f \text{ mod}}$ (em lugar do 1.4)
10 milhões de ciclos	$3,240 * 1.4 / 1,460 = 3,10$
20 milhões de ciclos	$3,240 * 1.4 / 1,350 = 3,36$
40 milhões de ciclos	$3,240 * 1.4 / 1,250 = 3,62$

F.2.3.4.6. Estado Limite de Serviço em fadiga

$$a_n = a_n \{1.5 - 0.5e^{(-0.05n^{0.25})}\}$$

a_n = deformação para o ciclo n.

a_1 = deformação para o 1º ciclo.

Para o nosso caso

N	a_n / a_1
10 milhões de ciclos	$1.5 - 0.5e^{-2.8} = 1.47$
20 milhões de ciclos	$1.5 - 0.5e^{-3.4} = 1.48$
40 milhões de ciclos	$1.5 - 0.5e^{-4.0} = 1.49$

Observe-se que a influência na flexibilidade da estrutura resulta em uma mudança progressiva da resposta da mesma a uma excitação periódica.

Se for o caso de uma excitação de frequência maior que a frequência natural da estrutura (estrutura sub-sintonizada) o efeito da deformação suplementar reduzirá a resposta. Com isso, a deformação incrementada à consequência calculada será maior da real. Se assumindo o resultado “majorado”, o mesmo não implica incompatibilidade com as exigências funcionais, poderemos afirmar que o desempenho será satisfatório. Se o resultado atingido não satisfazer as necessidades funcionais, teremos que ajustar o cálculo mediante uma análise detalhada por etapas. Uma sugestão pode ser a de realizar uma partição dos ciclos em intervalos, e para cada um deles assumir que a resposta da estrutura é de acordo à rigidez ao começo do intervalo. Poderá ser necessário efetuar mais de uma iteração até poder concluir finalmente se o desempenho é adequado ou não.

Se for o caso de uma excitação de frequência menor que a frequência natural da estrutura (estrutura sobre-sintonizada) o efeito da deformação suplementar incrementará a resposta. Nesse caso teremos que o resultado não é confiável já que a fadiga flexibiliza a estrutura e a resposta irá “in crescendo” (e a gente fez o cálculo de resposta no estado inicial). Uma hipótese do lado da segurança (muito) seria re-avaliar a resposta da estrutura de acordo às condições finais e ver se ainda assim as deformações são funcionalmente satisfatórias. Se não forem, teremos que efetuar uma partição do domínio dos ciclos e para cada intervalo assumir a flexibilidade associada ao ultimo ciclo. Poderá ser necessário efetuar mais de uma iteração até poder concluir finalmente se o desempenho é adequado ou não.

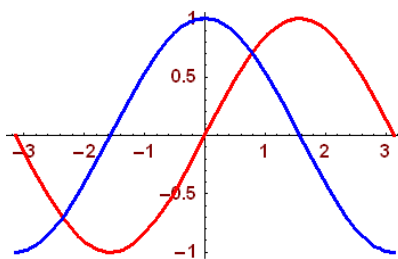
“Se a iteração não converge, deve se questionar se não chegou a hora de mudar a espessura do elemento estrutural”!!!

Anexo G. Séries de Fourier

Na dinâmica de estruturas são habituais os processos repetitivos. Devido à repetição nos processos de excitação resulta comum o emprego de funções periódicas.

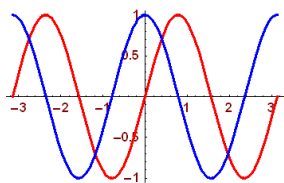
Por definição, para toda função periódica $f(t)$ existe certo valor associado T (período) tal que para qualquer t se cumpre que $f(t + T) = f(t)$. Resulta fácil comprovar que se T é período de $f(t)$, também $2T$, $3T$, ...serão períodos da mesma função. Em geral assumiremos a T como o mínimo valor não nulo que cumprirá a condição de periodicidade. Diremos que a frequência dessa função periódica é $f=1/T$.

As funções $\text{sen } t$ e $\text{cos } t$ são periódicas de período 2π .

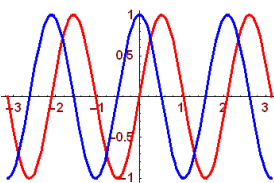


$\text{sen } t$ e $\text{cos } t$

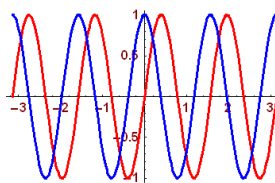
As funções $\text{sen } 2t$ e $\text{cos } 2t$ são periódicas de período π , $\text{sen } 3t$ e $\text{cos } 3t$ são periódicas de período $2\pi/3$, $\text{sen } 4t$ e $\text{cos } 4t$ são periódicas de período $\pi/2$, $\text{sen } nt$ e $\text{cos } nt$ de período $2\pi/n$.



$\text{sen}2t, \text{cos}2t$



$\text{sen}3t, \text{cos}3t$



$\text{sen}4t, \text{cos}4t$

Qualquer função de t cuja expressão seja $\text{sen}(2\pi t/T) = \text{sen}(2\pi ft)$ será periódica de período T . Uma função da forma $\text{sen}(2\pi n t/T) = \text{sen}(2\pi n f t)$ será periódica de período T/n , ou seja que a frequência de frequência nf .

Dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ periódicas de período T , cumprir-se-á que qualquer combinação lineal delas “ $a f(t) + b g(t)$ ” será também uma função periódica de período T .

As funções senoidais ($\text{sen } at$, $\text{cos } at$) são casos particulares de funções periódicas, mas com particularidades que outorgam a elas especial importância. Um fato de grande importância prática é que qualquer função periódica pode ser descomposta como combinação de senos e cossenos mediante as Series de Fourier.

Na análise funcional, um espaço de funções pode ser visualizado como o integrado por vetores equivalentes aos vetores geométricos espaciais, mas de dimensão infinita e não 3. Nesse espaço qualquer combinação lineal de funções (vetores) do espaço será também uma função (vetor) do mesmo espaço. Da mesma maneira que o espaço de vetores espaciais tem subespaços (como o subespaço dos vetores contidos em certo plano), um subespaço das funções poderá ser definido mediante uma condição que implique que as combinações lineais de qualquer par de funções do subespaço em questão também resultem contidas no mesmo subespaço (também cumpram as condições de definição). Ou seja, que um subespaço de certo espaço é de fato um outro subespaço contido no espaço.

Um gerador do espaço será um conjunto de funções (vetores) tal que qualquer função do espaço poderá ser expressado como combinação lineal dos vetores do gerador. Uma base do espaço em questão será um gerador que cumprirá que os coeficientes da combinação lineal sejam únicos. Esses coeficientes se chamam coordenadas do vetor para a base em questão.

A condição para que um gerador seja base é que a única combinação lineal que resulta no vetor nulo é a que tem todos os coeficientes nulos. A essa condição se chama “condição de independência lineal”. Em outras palavras, uma base é um gerador com vetores linearmente independentes. Um gerador que tenha um vetor que seja combinação linear de outros não será base. Ou seja, um gerador que contem “redundâncias” não pode ser chamado base. Resulta fácil visualizar que uma base será um gerador com o mínimo de quantidade de vetores.

A dimensão do espaço vem dada justamente pela quantidade de funções que integram a base. A base não é única, pero qualquer base terá a mesma quantidade de vetores (a dimensão).

Para consolidar o conceito com um exemplo simples: qualquer vetor de dimensão 2 (x;y) pode ser expressado como uma “única” combinação lineal de (1;0) e (0;1):

$$(x;y) = x (1;0) + y (0;1)$$

Com isso vemos que $\{ (1;0) , (0;1) \}$ é base do espaço de dimensão 2 dos vetores da forma (x,y) ou seja dos vetores do plano. Em particular chama-se a essa base “ base canônica “. As coordenadas do vetor (x,y) na base canônica são justamente x e y.

Outra base desse mesmo espaço será $\{ (1/2;1/2) , (1/2; - 1/2) \}$. Resulta fácil ver que:

$$(x;y) = (x + y) (1/2;1/2) + (x - y) (1/2; - 1/2)$$

Dai resulta que as coordenadas do vetor (x;y) na nova base serão $(x + y)$ e $(x - y)$.

Nos espaços de funções teremos funções $f(t)$ em lugar de vetores (x,y). As funções periódicas de período T conformam um subespaço vetorial já que qualquer combinação lineal de 2 funções periódicas de período T (vetores desse espaço) será também uma função periódica de período T. As funções senoidais (cosenoidais) de período T serão vetores desse subespaço, também qualquer função constante será. Resulta importante visualizar que qualquer função periódica cujo período seja T/n também será periódica de período T. Com o qual poderemos dizer que as seguintes funções são vetores desse espaço (o das funções de período T).

$$1 ; \operatorname{sen} (2\pi/T) ; \operatorname{sen} (2\pi*2t/T) ; \operatorname{sen} (2\pi*3t/T) ; \operatorname{sen} (2\pi*4t/T) ; \dots\dots\operatorname{sen} (2\pi*nt/T); \\ \cos (2\pi/T) ; \cos (2\pi*2t/T) ; \cos (2\pi*3t/T) ; \cos (2\pi*4t/T) ; \cos (2\pi*nt/T)$$

Escrevendo $f = 1/T =$ frequência , essas funções periódicas de período T (frequência f) ficam expressadas como:

$$1 ; \operatorname{sen} (2\pi ft) ; \operatorname{sen} (2\pi*2ft) ; \operatorname{sen} (2\pi*3ft) ; \operatorname{sen} (2\pi*4ft) ; \dots\dots\operatorname{sen} (2\pi*nft); \cos (2\pi*2ft) ; \cos (2\pi*3ft) ; \cos (2\pi*4ft) ; \dots\dots \cos (2\pi*nft)$$

Se tomarmos todas estas funções até n infinito, teríamos que este conjunto infinito de funções são uma base do espaço (de dimensão infinita) das funções periódicas de período T (frequência f).

A partir desse fato, as Series de Fourier são um método matemático que permite converter uma função periódica em uma série trigonométrica. As series de Fourier adotam esse conjunto de funções periódicas como base do espaço das funções periódicas. Fourier achou a metodologia de achar as coordenadas das funções periódicas com período $T=1/f$ na base antes mencionada.

Como em geral não pode se levar em conta as infinitas funções senoidais essas, o processo em geral se trunca nas primeiras $2n+1$ funções (para certo n). Grande é a importância resultante do fato que quando engrandecemos o n a aproximação é melhor, e quando se escolhe certo n em particular é devido a que já a aproximação é suficiente boa.

Outra maneira de interpretar o anterior seria dizer que as $2n+1$ funções escolhidas são uma base de um subespaço do espaço das funções periódicas de período T , e o que obtemos com a serie truncada não é outra coisa que a projeção da nossa função nesse subespaço escolhido.

A idéia importante consiste em que uma função periódica pode ser aproximada pela soma de funções senoidais com diferentes amplitudes e frequências. Essas frequências são múltiplas da frequência da função periódica.

O interessante do assunto resulta do fato que em geral uma quantidade pequena de termos já fornece uma aproximação muito boa.

A expressão da serie de Fourier de uma função $x(t)$ periódica de frequência f será :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f t n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi f t n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

Anexo H. Transformadas de Fourier

Desde o ponto de vista das matemático a Transformada de Fourier é um operador linear que faz corresponder funções em outras funções. do ponto de vista da física, esse operador decompõe um sinal (uma função) em um espectro contínuo com domínio nas frequências.

Seja $f(t)$ um sinal que não seja periódica. Diremos que $F(s)$ é a Transformada de Fourier de $f(t)$, onde s é um número real associado à frequência.

Sendo que $f(t)$ não é periódica, não é possível achar a Serie de Fourier da qual extrairíamos um espectro de frequências. Na literatura encontraremos diversas definições mais ou menos equivalentes da metodologia de cálculo para obter $F(s)$.

Quando $f(t)$ cumpre hipóteses de regularidade (integrável de acordo com Lebesgue) a transformada $F(s)$ resultará:

$$F(s) = \int f(t)e^{-2\pi i s t} dt$$

$F(s)$ resulta uma função complexa (com domínio real e percorrido complexo). Esses valores complexos de $F(s)$ representados polarmente dariam a amplitude e a fase associada a cada frequência s .

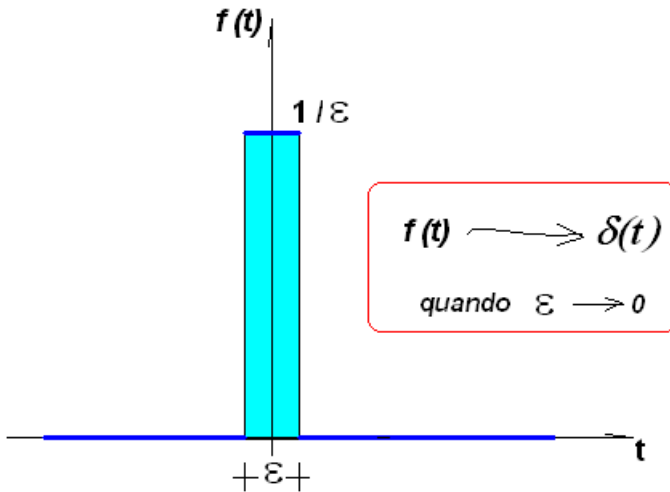
O operador Transformada de Fourier é quase auto inverso, já que da Transformada $F(s)$ (função no domínio das frequências) pode se obter a pré-imagem $f(t)$ (sinal) de acordo a:

$$f(t) = \int F(s)e^{2\pi i s t} ds$$

Em hipóteses de regularidade de $f(t)$ resultará que sempre $F(s)$ tenderá a zero quando $s \rightarrow \infty$.

A função **Delta de Dirac** $\delta(t)$ é uma distribuição que toma o valor “infinito” para $t=0$ e O (zero) para todo t diferente de zero, ademais disso cumpre-se que a integral no domínio real do **Delta de Dirac** é 1. Pode pensar-se o **Delta de Dirac** como uma abstração semelhante à da “massa pontual” ou à da “força concentrada”, uma concentração de densidade infinita em um intervalo zero que resulta em um total finito (integral igual a1). Pode se associar o **Delta de Dirac** ao conceito do impulso que se desenvolve em um instante com a aplicação de uma força muito grande ou infinita. A realidade física será que as forças serão finitas e o tempo de aplicação não será zero. O **Delta de Dirac** seria a distribuição limite na abstração de um processo instantâneo no

qual nos interessa o “impulso total” e não o processo que se deu durante esse intervalo infinitesimal.



O **Delta de Dirac** é apresentado como a distribuição $\delta(t)$ que haverá de cumprir que para qualquer função $f(t)$ continua:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

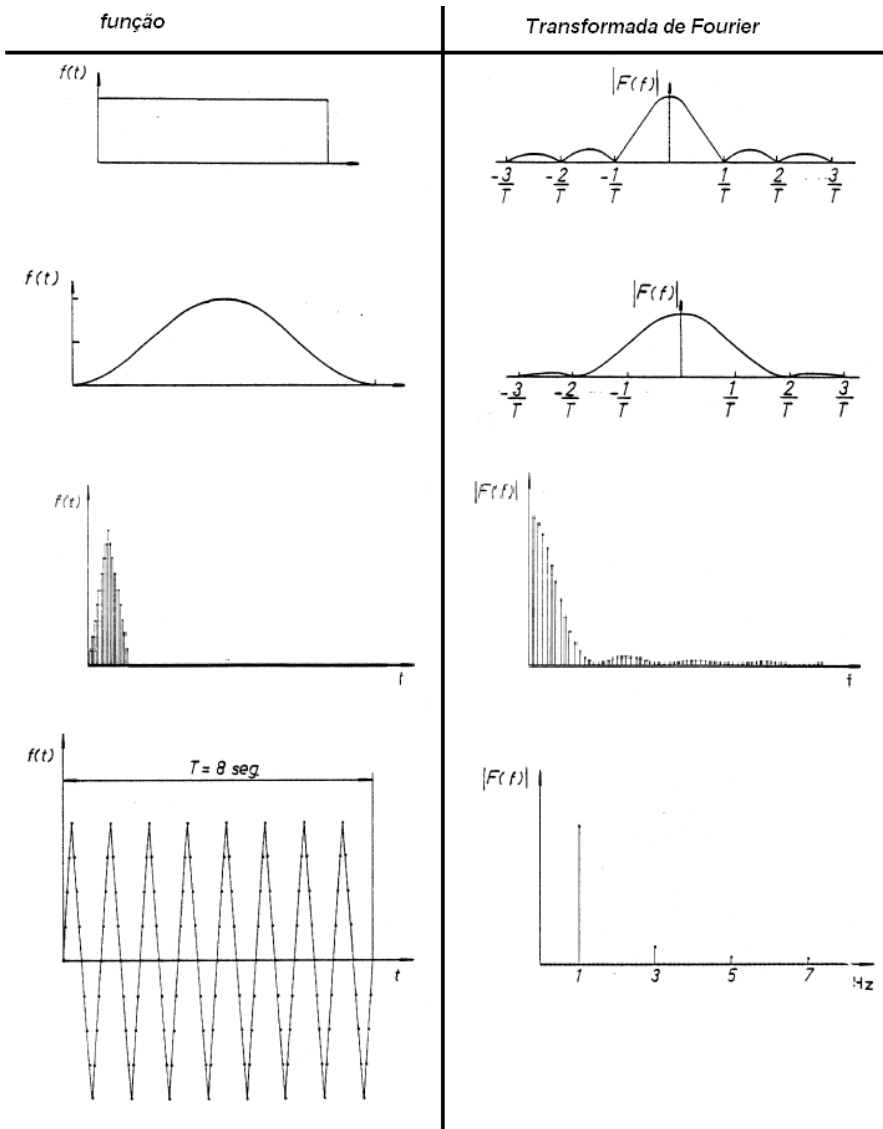
A **Transformada de Fourier** do sinal **Delta de Dirac** será a função constante 1.

Sinal	Transformada de Fourier
$\delta(t)$	1
1	$\delta(s)$
$e^{2\pi i a t}$	$\delta(s - a)$
$\cos(2\pi a t)$	$\frac{\delta(s - a) + \delta(s + a)}{2}$
$\sin(2\pi a t)$	$\frac{\delta(s - a) - \delta(s + a)}{2i}$

Na tabela anexa a continuação poderá se achar outras transformadas desta vez definidas empregando a frequência angular como variável:

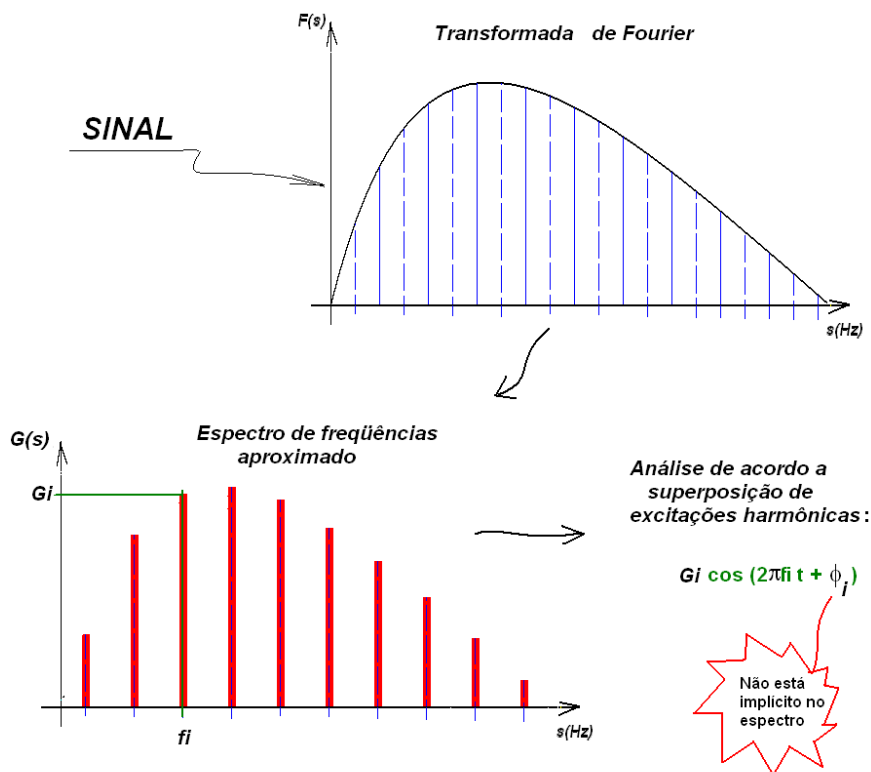
Função	Transformada de Fourier
$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$
$f(t - t_0)$	$F(\omega) e^{-j\omega t_0}$
$f(t) e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(\alpha t)$	$\frac{1}{ \alpha } F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
$\int_{-\infty}^t (\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$

A Transformada de Fourier é uma extensão do conceito de espectro de frequências:

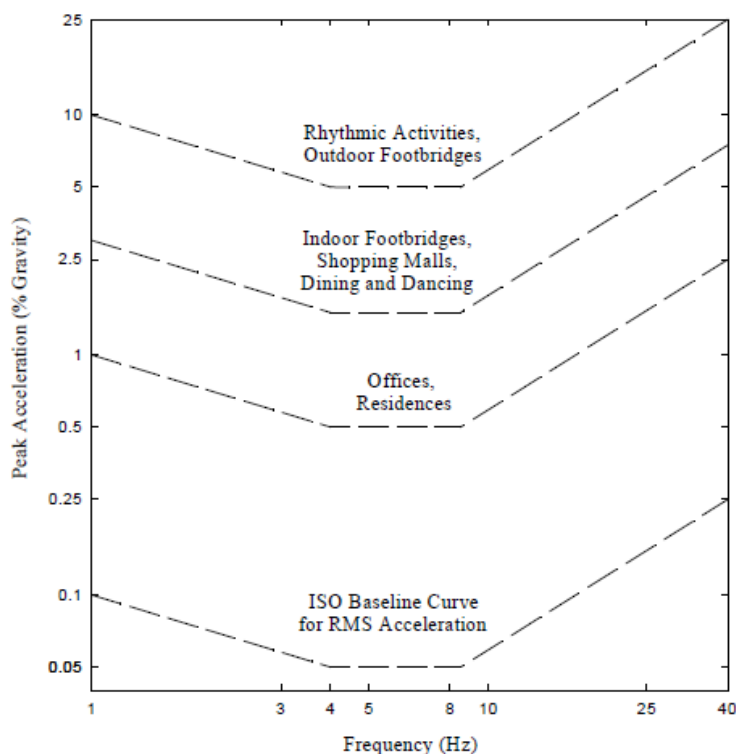


Resulta importante destacar que o gráfico do módulo da Transformada de Fourier não fornece toda a informação do sinal, já que com ela fica desconhecida a distribuição da fase.

Dado um sinal que seja não periódico o módulo da Transformada se assemelha ao espectro de frequências somente que agora teremos que esse espectro é contínuo e não discreto como resultava para as funções periódicas e quase periódicas. Podemos discretizar o espectro mediante uma partição, e associar a cada frequência (centro do intervalo) a área (ou integral) do intervalo e obter um espectro de frequências discreto com o qual realizar um cálculo aproximado de acordo à superposição de cargas harmônicas. Ou seja, assumindo essas áreas como coeficiente de Fourier de uma suposta série de Fourier somente ficaria por determinar as fases apropriadas.



Anexo I. Aceitabilidade de acelerações induzidas por atividades humanas de acordo a ISO 2631-2



Recommended peak acceleration for human comfort for vibrations due to human activities ISO 2631-2

Da análise das curvas fornecidas em gráficos escaladas logaritmicamente pela ISO 2631-2 resulta que a aceleração pico A (em m/s^2) para garantir o conforto devido a vibrações induzidas por atividades humanas deverá cumprir:

Valores aceitáveis de “aceleração pico” A em m/s ² deduzido a partir de ISO 2631-2			
	Frequência em Hz		
	$1\text{Hz} \leq f < 4\text{Hz}$	$4\text{Hz} \leq f \leq 9\text{Hz}$	$9\text{Hz} < f \leq 40\text{Hz}$
Moradias e Escritórios	$A < \frac{0,100}{\sqrt{f}}$	$A < 0,050 \text{ m/s}^2$	$A < \frac{f^{1,08}}{215,0}$
Passarelas Interiores e Centros comerciais	$A < \frac{0,316}{\sqrt{f}}$	$A < 0,158 \text{ m/s}^2$	$A < \frac{f^{1,08}}{68,0}$
Passarelas exteriores, Atividades rítmicas	$A < \frac{1,000}{\sqrt{f}}$	$A < 0,500 \text{ m/s}^2$	$A < \frac{f^{1,08}}{21,5}$

Justificativa:

Sendo “a” a aceleração limite em termos de %g

0: Curva básica :

$$f < 4 \quad \ln a = -2.3 - 0.5 (\ln f) \quad a = 0,1 : \sqrt{f}$$

$$4 < f < 9 \quad a = 0.05$$

$$f > 9 \quad \ln a = -3 + 1.0789 (\ln f - 2.197) = -5,370 + 1.0789 \ln f \quad a = 0.00465 f^{1.08}$$

1: Limite para moradias e escritórios

$$f < 4 \quad \ln a = -0.5 (\ln f) \quad a = 1 : \sqrt{f}$$

$$4 < f < 9 \quad a = 0.5$$

$$f > 9 \quad \ln a = -0.7 + 1.0789 (\ln f - 2.197) = -3.07 + 1.0789 \ln f \quad a = 0.0465 f^{1.08}$$

2: Limite para passarelas interiores, centros comerciais (curva logarítmica média entre 1 e 3)

$$f < 4 \quad \ln a = 1.15 - 0.5 (\ln f) \quad a = 3,16 : \sqrt{f}$$

$$4 < f < 9 \quad a = 1.58$$

$$f > 9 \quad \ln a = 0.45 + 1.0789 (\ln f - 2.197) = -1.92 + 1.0789 \ln f \quad a = 0.147 f^{1.08}$$

3. Limite para passarelas exteriores, atividades rítmicas, etc

$$f < 4 \quad \ln a = 2.3 - 0.5 (\ln f) \quad a = 10 : \sqrt{f}$$

$$4 < f < 9 \quad a = 5$$

$$f > 9 \quad \ln a = 1.6 + 1.0789 (\ln f - 2.197) = -0,770 + 1.0789 \ln f \quad a = 0.465 f^{1.08}$$

Anexo J. Exemplos de cálculo – Parte 1

Ex. 1 - a) A frequência natural de um oscilador $k=4 \text{ kgf/cm}$, $m=1\text{kg}$ é:

a1) 0,32 Hz ; a2) 3,18 Hz ; a3) 10 Hz

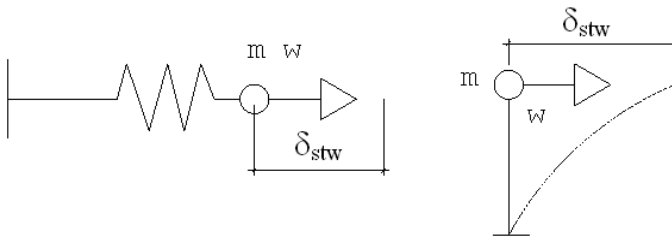
$$k = 4 \text{ kgf/cm} = 4 \cdot 10 \text{ N}/0.01 \text{ m} = 4000 \text{ N/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{1}} = 63.25 \text{ Rad/s} \therefore f = \frac{\omega}{2\pi} \cong 10 \text{ Hz}$$

b) Qual será a frequência do mesmo oscilador se a massa for 100 kg.

$$\omega' = \sqrt{\frac{4000}{100}} = 6.32 \text{ Rad/s} \therefore f' \cong 1 \text{ Hz}$$

Ex. 2 - a) Relação entre a frequência natural de um oscilador de 1 grau de liberdade e o deslocamento estático devido à ação do peso aplicado na direção do grau de liberdade.



$$W = mg \quad \delta = \frac{F}{K} \quad \delta_{st} = \frac{mg}{k} = \frac{g}{k/m} = \frac{g}{\omega^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{wst}}} \quad ; \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \cong \frac{1}{2\sqrt{\delta_{wst}}} \quad ; \quad T = \frac{1}{f} \cong 2\sqrt{\delta\omega}$$

b) Qual é a frequência do modo vertical de oscilação de um bloco maciço de concreto que recalca 1cm devido ao peso próprio?

$$f \cong \frac{1}{2\sqrt{0.01}} = 5\text{Hz}$$

Ex. 3 - O coeficiente de mola de uma base circular de radio r_0 sobre solo com módulo de corte G e módulo de Poisson ν é:

$$K_2 \frac{4Gr_0}{1-\nu}$$

$h \geq 1.85m$ Espessura mínima da base para que a frequência seja $< 7\text{Hz}$.

Uma base circular de 4m de diâmetro de concreto está apoiada sobre solo de características $G=200 \text{ kgf/cm}^2$ e $\nu=0.35$ (argila branda), e sustenta um equipamento cujo peso total é 67 toneladas. Procura-se que a frequência natural do conjunto não supere os 7 Hz. Qual deverá ser a espessura mínima da base?

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = 200\text{cm} \\ G = 200\text{Ncm}^2 \\ \nu = 0.35 \end{array} \right\} K_z = \frac{4 * 200 * 200}{0.65} = 2.46 * 10^5 \text{ kgf/cm}$$

$$f \leq 7\text{Hz} \therefore \frac{1}{2\sqrt{\delta_{wst}}} \leq 7 \quad \delta_{wst} \geq 5.1 * 10^{-3} \text{ m} = 0.51\text{cm}$$

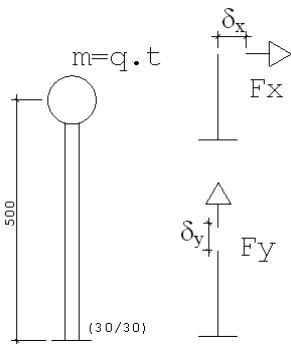
$$\delta_{wst} = \frac{W}{K_z} \Rightarrow W \geq 2.46 * 10^5 * 0.51 = 125.460\text{kgf}$$

$$W_{eq} = 67t \quad W_{base} = \pi r_0^2 * 2.5 * h = 31.4 \quad h \geq 125.5 - 67.5$$

Ex. 4 - Um pilar 30/30 de concreto ($E= 30\,000 \text{ kgf/cm}^2$) e altura 5m sustenta uma massa de 9 t no topo. Calcular as frequências naturais de vibração horizontal e vertical.

$$E = 3 * 10^5 \text{ kgf/cm}^2 = 3 * 10^{10} \text{ N/m}^2; m = 9 * 10^3 \text{ kg}; l = 5\text{m}$$

$$I = \frac{03^4}{12} = 6.75 + 10^{-4} \text{ m}^4; A = 0.3^2 = 0.09\text{m}^2$$



$$\delta_x = \frac{F_x l^3}{3EI} \therefore k_x = \frac{3EI}{l^3} = 4.86 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_x}{m}} = 1.17 \text{ Hz}$$

$$\delta_y = \frac{F_y l}{EA} \therefore k_y = \frac{EA}{l} = 5.40 \cdot 10^8 \text{ N/m}$$

$$f_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_y}{m}} = 39.0 \text{ Hz}$$

Do deduzido no exemplo 2 pode-se chegar a:

$$f \cong \frac{1}{2\sqrt{\delta_{wst}}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Diagrama de deslocamento horizontal } 9tf \\ \text{Diagrama de deslocamento vertical } 9tf \end{array} \right.$$

$$\delta_{wstx} = \frac{9tf}{K_x} = \frac{90000 \text{ N}}{4.86 \cdot 10^5 \text{ N/m}} = 0.185 \text{ m}$$

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{0.185}} = 1.16 \text{ Hz}$$

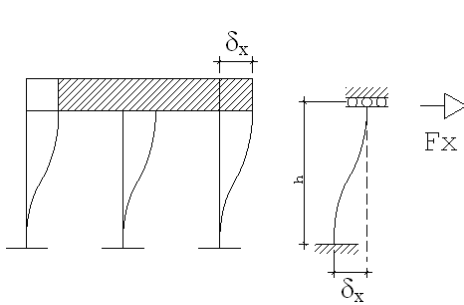
$$\delta_{wsty} = \frac{9tf}{K_y} = \frac{90000 \text{ N}}{5.4 \cdot 10^8 \text{ N/m}} = 1.67 \cdot 10^{-4}$$

$$f_y = \frac{1}{2\sqrt{1.67 \cdot 10^{-4}}} = 38.7 \text{ Hz}$$

Ex. 5 - A estrutura da figura composta da laje de espessura 200 cm sobre 6 pilares quadrados de lado 100 cm sustenta uma máquina que pesa 50 t. Desprezando a massa dos pilares ($E = 30\,000 \text{ kgf/cm}^2$):

- a) Qual deve ser a altura h dos pilares da mesma para que a frequência natural da oscilação horizontal seja de 5 Hz?

Do deduzido no exemplo 2 e assumindo a laje ∞ rígida à flexão.



$$\delta_x = \frac{F_x h^3}{12(EI)} \quad k_x = \frac{12(EI)}{h^3}$$

$$E = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{tf}}{\text{m}^2}$$

$$I = 6 \cdot \frac{(1.0)^4}{12} = 0.5 \text{ m}^4$$

Para conseguir que a frequência natural seja de 5Hz o deslocamento estático devido ao peso próprio aplicado a direção x deverá ser de: 1cm = 0.01m (veja exemplo b).

$$\frac{W}{K_x} = 0.01 \Rightarrow \begin{cases} W = 50 \text{ tf} + 50 \text{ m}^2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 2.5 \text{ tf/m}^3 = 300 \text{ tf} \\ K_x \frac{300}{0.01} = 3 \cdot 10^5 \text{ tf/m} \end{cases}$$

$$\frac{12 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 0.5}{h^3} = 30000 \Rightarrow h^3 = 6000 \text{ m}^3 \quad h = 8.43 \text{ m}$$

- b) No caso que o nível superior da laje de apoio da maquinaria tenha que estar a uma altura de 12 m, qual seria a frequência natural?

$$\left. \begin{aligned} \delta_{wst} &= \frac{W}{K_x} \quad ; \quad W = 300 \text{ tf} \\ K_x &= \frac{12EI}{h^3} = \frac{1.8 \cdot 10^7}{10^3} = 18000 \frac{\text{tf}}{\text{m}} \end{aligned} \right\} \delta_{wst} = \frac{300}{18000} = 0.017$$

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{0.017}} = 3.87 \text{ Hz}$$

Outra maneira seria levar em conta que $f \propto \sqrt{K}$ e $f \propto 1/h^3 \Rightarrow$

$$\frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{k'}{k}} = \sqrt{\left(\frac{h}{h'}\right)^3} \Rightarrow f' = \left(\frac{h}{h'}\right)^3 \quad f = \left(\frac{8.43}{10}\right)^{3/2} * 5 = 0.77 * 5 = 3.85 \text{ Hz}$$

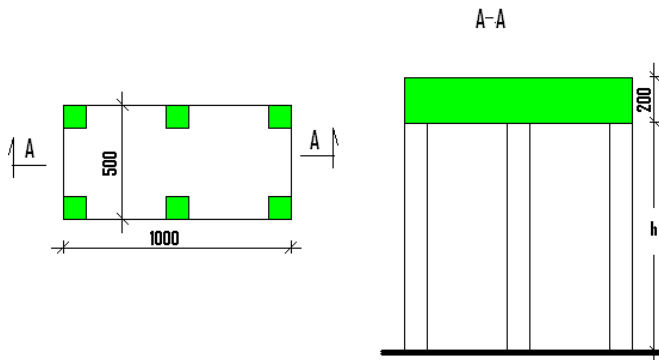
- c) Se afastarmos da posição de equilíbrio na direção x 1 cm e liberarmos a estrutura de (a) qual será a aceleração máxima da laje, e qual será a força cortante total máxima no apoio da máquina. (não levar em conta efeitos de 2ª ordem)

$$f = 5 \text{ Hz} \quad \omega = 2\pi f = 31.42 \text{ Rad/s} . \text{ A amplitude da oscilação será de 1 cm.}$$

$$a_{\min} = -\omega^2 A = -(31.42)^2 * 0.01 \text{ m} = 9.87 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Cortante: } |V_g| = 50000 \text{ kg} * 9.87 \text{ m/s}^2 \approx 500 \text{ kN} \approx 50t$$

- d) Supondo o amortecimento estrutural $\zeta = 1\%$, quanto tardará em reduzir-se a amplitude de oscilação a menos de 1mm. Qual será então o momento máximo nos pilares? .(não levar em conta efeitos de 2ª ordem)



$$u(t) = C e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega_D t + \theta)$$

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0 \begin{cases} \theta = 0 & \omega_D \cong \omega_1 = 31.42 \text{ Rad/s} \\ C = 0.01 ; \quad \xi = 0.01 \end{cases}$$

$$\frac{0.001}{0.01} = \frac{u(t_1)}{u(0)} = e^{-\xi \omega t_1} = \frac{1}{10} \therefore e^{-\xi \omega t_1} 10 \therefore \xi \omega t_1 = u(10) \therefore t_1 = \frac{2.3}{0.01 * 31.42} = 7.32s$$

Cada ciclo dura $\approx T_u = \frac{1}{f_u} = 0.2s$ $\frac{7.32}{0.2} = 37$, ou seja, depois de 37 ciclos o cortante será associado a deformação de 1mm:

$$V = K_x * 0.001 = 3 * 10^5 * 0.001 = 300tf \therefore V_i = \frac{300}{6} = 50tf$$

$$M_i = V_i * h/2 = 50 * \frac{8.43}{2} = 211tm$$

Outra forma de calcular o cortante total será:

$$m_{tot} = 300t ; a \cong g ; V = 300tf$$

Ex 6 - A maquina da base do exemplo 3 gera uma excitação vertical harmônica de 10 tf com uma frequência de 10 Hz.

- a) Supondo que o amortecimento for de 10%, quais seriam as amplitudes de deslocamento, velocidade e aceleração verticais da estrutura no estacionário.

$$f_n = 7Hz \quad K_z = 2.46 * 10^5 \text{ kf/cm}; \xi = 0.10$$

Excitação: $f = 10Hz$

$$F_0 = 1tf \quad [F(t) = 1 * \sin(2\pi * 10t)]$$

$$\text{Fator de amplificação: } M = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r^2}}$$

$$v = \frac{f}{f_n} = \frac{10}{7} = 1.43 \quad M = 0.92$$

$$\delta_{est} = \frac{10000}{2.46 * 10^5} = 0.041cm = 0.41mm$$

$$\omega = 2\pi * 10 = 62.83 \text{ Rad/s} \quad \omega^2 = 3948 \text{ Rad}^2/\text{s}^2$$

$$\text{amp dyn:} \quad \delta_{dyn} = 0.92 * 0.41 = 0.38 \text{ mm}$$

$$\text{amp veloc:} \quad |V_0| = \omega_{dyn} = 24 \text{ mm/s}$$

$$\text{amp acel:} \quad |a| = \omega^2 \delta_{dyn} = 1.5 \text{ m/s}^2$$

- b) Se supuséramos que a amplitude da excitação resulta proporcional a frequência da mesma, e que a máquina é acionada devagar (incrementando a frequência ao tempo que a resposta vai atingindo o estacionário para cada frequência intermédia), qual seria o deslocamento quando a frequência da excitação passa pelos 7Hz.

$$0 < f < 10 \text{ Hz}$$

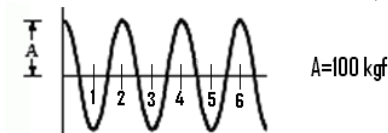
$$0 < r < 1.43 \quad F_0 = \frac{f}{10} * 10 \text{ tf}, \text{ ou seja: } F_0(f) = f \quad [F_0] = \text{tf}$$

$$f = 7r \Rightarrow F_0(r) = 7r$$

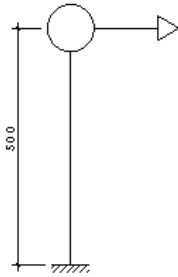
$$\delta_{dyn} = M(r) \frac{F_0(r)}{K_z} \quad ; \text{ para } r=1 \text{ (f=7Hz, ressonância)}$$

$$\left. \begin{aligned} M(r) &= \frac{a}{Z\xi} = 5 \\ F_0(r) &= 7\text{tf} = 7000 \text{ kgf} \end{aligned} \right\} \delta_{dyn} = 0.14 \text{ cm} = 1.4 \text{ mm}$$

Ex 7 – No topo do pilar do exemplo 4 se aplica uma excitação horizontal Harmônica de amplitude 100 kgf e período 2 segundos. Seja o fator de amortecimento $\xi = 1\%$. (não levar em conta efeitos de 2ª ordem)



- a) Achar a resposta estacionária do deslocamento horizontal.



$$- f_{nx} = 1.6 \text{ Hz} \quad f = \frac{1}{T} = 0.5 \text{ Hz}$$

$$r = \frac{f}{f_n} = 0.43 \text{ Hz} \quad F_0 = 100 \text{ kgf} = 1000 \text{ N}$$

$$M = 1.22$$

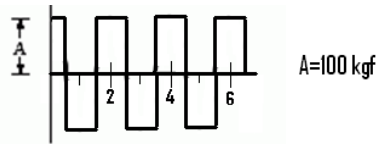
$$\delta_{est} = \frac{10000}{4.86 * 10^5} = 2.06 * 10^{-3} \text{ m} = 2.1 \text{ mm}$$

$$\omega = 2\pi * 0.5 = 3.14 \text{ Rad/s} \quad \omega^2 = 9.87 \text{ Rad}^2/\text{s}^2$$

$$V_0 = \omega \delta_{dyn} = 8.04 \text{ mm/s}$$

$$a_0 = \omega^2 \delta_{dyn} = 2.53 \text{ c m/s}^2$$

- b) Estimar a resposta e o momento máximo para o caso em que a historia de excitação seja:



$$A_0 = 2A = 200 \text{ kgf}$$

Coefficiente de Fourier: $a_n = \frac{2A_0}{n\pi} \sin(n\pi d)$

$$d = \frac{k}{T} = 0.5 \quad a_n = \frac{2 * 200}{n * 3.14} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$T = 2 \text{ s}$$

$$a_1 = 127.4 \text{ kgf} \quad f = 0.5 \text{ Hz}$$

$$a_2 = 0 \quad f = 1 \text{ Hz}$$

$$a_3 = -43 \text{ kgf} \quad f = 1.5 \text{ Hz}$$

$$F_1 = 127.4 \text{ kgf}$$

$$r_1 = 0.43 \text{ kgf}$$

$$M = 1.22 \quad \delta_{est_1} = \frac{1274}{4.86 * 10^5} = 2.62 * 10^{-3} m = 2.6 mm \quad \delta_{dyn_1} = 3.2 mm$$

$$F_2 = 43 kgf$$

$$r_2 = \frac{1.5}{1.16} = 1.29$$

$$M = 1.5 \quad \delta_{est_2} = \frac{430}{4.86 * 10^5} = 8.85 * 10^{-4} m = 0.9 mm \quad \delta_{dyn_2} = 1.3 mm$$

$$\delta_{dyn} \leq 3.2 + 1.3 = 4.5 mm$$

$$\omega_1 = 3.14 Rad/s$$

$$\omega_2 = 2\pi \cdot 1.5 = 9.42 Rad/s$$

$$\omega_1^2 = 9.87 Rad/s^2$$

$$\omega_2^2 = 88.8 Rad/s^2$$

$$|V| \leq \omega_1 \delta_{dyn_1} + \omega_2 \delta_{dyn_2} = 10.0 + 12.2 = 22.2 m/s$$

$$|a| \leq \omega_1^2 \delta_{dyn_1} + \omega_2^2 \delta_{dyn_2} = 3.1 cm/s^2 + 11.5 cm/s^2 = 14.6 cm/s^2$$

c) Como seria a resposta do caso (a) se agregarmos 39.4 toneladas no topo.

$$m' = 39.4 + 9 = 48.4 t \quad m = 9 t$$

$$f_n \propto 1/\sqrt{m} \quad f_n' = \sqrt{\frac{m}{m'}} \quad f_n = 0.43 * 1.16 = 0.5 Hz$$

$$\text{Estaria em ressonância !} \quad M = \frac{1}{2\xi} = 50$$

$$\delta_{dyn} = 50 * 2.1 mm = 105 mm = 10.5 cm$$

d) Em que porcentagens diminuiriam as resposta do caso (a) e do caso (c) se o fator de amortecimento mudasse a $\xi = 10\%$.

$$m(\xi = 1\%, r = 0.43) = 1.227$$

$$m'(\xi = 10\%, r = 0.43) = 1.220$$

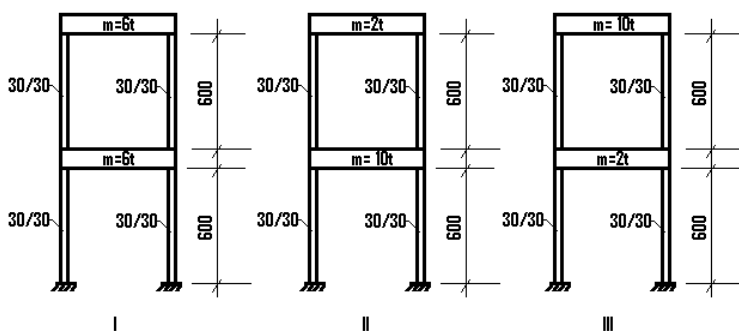
Para $r=0.43$ a diminuição da resposta resulta menor que 0.6%.

$$m(\xi = 1\%, r = 1) = \frac{1}{2\xi} = 50$$

$$m(\xi = 10\%, r = 1) = \frac{1}{2\xi} = 5$$

Para ressonância a diminuição é de 90%.

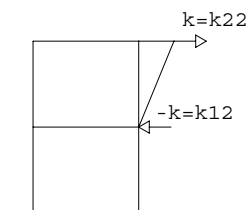
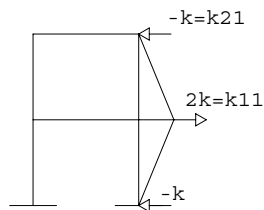
Ex 8 – a) Achar a expressão das matrizes M e K das estruturas:



$$-K_I = K_{II} = K_{III} = \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$$

$$K = 2 \frac{12EI}{l^2} = \frac{24 * 3 * 10^{10} * 6.75 * 10^{-4}}{6^3}$$

$$K = 2.25 * 10^6 \frac{N}{m}$$



$$M_I = \begin{pmatrix} 6000 & 0 \\ 0 & 6000 \end{pmatrix}; M_{II} = \begin{pmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 2000 \end{pmatrix}; M_{III} = \begin{pmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 10000 \end{pmatrix}$$

b) Achar frequências modais e formas modais.

$$b) - \left| -\omega^2 M + K \right| = 0 \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + 2K & -K \\ -K & -m_2\omega^2 + K \end{vmatrix} = 0$$

$$(-m_1\omega^2 + 2K)(-m_2\omega^2 + K) - K^2 = 0$$

$$m_1 m_2 (\omega^2)^2 - (m_1 2m_2) l_2 \omega^2 + K^2 = 0 \Rightarrow (\omega^2)^2 - \frac{(m_1 2m_2) l_2}{m_1 m_2} (\omega^2) + \frac{l_2}{m_1 m_2} = 0$$

Caso 1: $m_1 = 6000 = m_2$

$$(\omega^2)^2 - 1125 \omega^2 + 140625 = 0$$

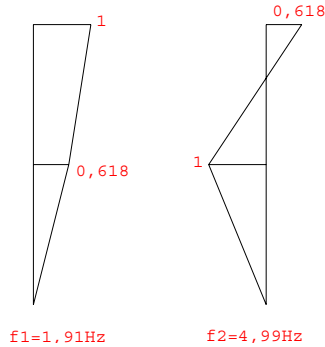
$$\omega^2 = \frac{1125 \pm 838.5}{2} = \begin{cases} 981.75 \\ 143.25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_2 = 31.33 \text{ Rad/s} \\ \omega_1 = 11.97 \text{ Rad/s} \end{cases}$$

$$(-\omega_1^2 M + K) \phi_1 = \theta$$

$$\begin{bmatrix} 3.64 * 10^6 & -2.25 * 10^6 \\ -2.25 * 10^6 & 1.39 * 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = 0 \quad \frac{\phi_{11} = 0.618 \phi_{21}}{\phi_{11} = 0.618 \quad \phi_{21} = 1000}$$

$$(-\omega_2^2 M + K) \phi_2 = \theta$$

$$\begin{bmatrix} -1.39 * 10^6 & -2.25 * 10^6 \\ -2.25 * 10^6 & -3.64 * 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad \frac{\phi_{22} = 0.618 \phi_{12}}{\phi_{12} = 1000 \quad \phi_{22} = 0.618}$$



Caso 2: $m_1 = 10000$ $m_2 = 2000$

$$(\omega^2)^2 - 1575 (\omega^2) + 253125 = 0$$

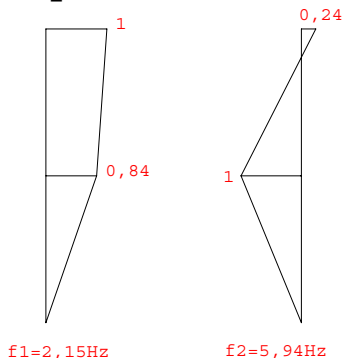
$$\omega^2 = \frac{1575 \pm 1211.7}{2} = \begin{cases} 1393.4 \\ 181.7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_2 = 37.33 \text{ Rad/s} \\ \omega_1 = 13.48 \text{ Rad/s} \end{cases}$$

1º modo:

$$\begin{bmatrix} 2.68 * 10^6 & -2.25 * 10^6 \\ -2.25 * 10^6 & 1.89 * 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = 0 \quad \frac{\phi_{11} = 0.840 \phi_{21}}{\phi_{11} = 0.840 \quad \phi_{21} = 1000}$$

2º modo:

$$\begin{bmatrix} -9.43 * 10^6 & -2.25 * 10^6 \\ -2.25 * 10^6 & -0.54 * 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad \frac{\phi_{22} = -0.240 \phi_{12}}{\phi_{12} = -1000 \quad \phi_{22} = 0.240}$$



Caso 3: $m_1 = 2000$ $m_2 = 10000$

$$(\omega^2)^2 - 2475 (\omega^2) + 253125 = 0$$

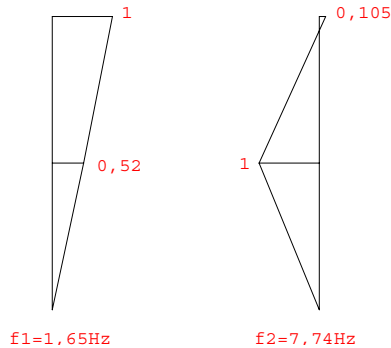
$$\omega^2 = \frac{2475 \pm 2261}{2} = \left\langle \frac{2.368}{107} \right\rangle \rightarrow \begin{cases} \omega_2 = 48.66 \text{ Rad/s} \\ \omega_1 = 10.34 \text{ Rad/s} \end{cases}$$

1º modo:

$$\begin{bmatrix} 4.29 * 10^6 & -2.25 * 10^6 \\ -2.25 * 10^6 & 1.18 * 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = \theta \frac{\phi_{11} = 0.52 \phi_{21}}{\phi_{11} = 1.00 \quad \phi_{21} = 0.52}$$

2º modo:

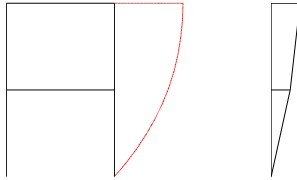
$$\begin{bmatrix} -0.24 * 10^6 & -2.25 * 10^6 \\ -2.25 * 10^6 & -21.43 * 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \theta \frac{\phi_{22} = -0.105 \phi_{12}}{\phi_{12} = -1000 \quad \phi_{22} = 0.105}$$



- c) Achar frequência natural fundamental aproximada para I de acordo ao método de Rayleigh.

RAYLEIGH

(Caso 1)

 6×10^4 KN 6×10^4 KN

$$\frac{6 \cdot 10^4}{2.25 \cdot 10^6} + 5.3 \cdot 10^{-2} = 8.0 \cdot 10^{-2}$$

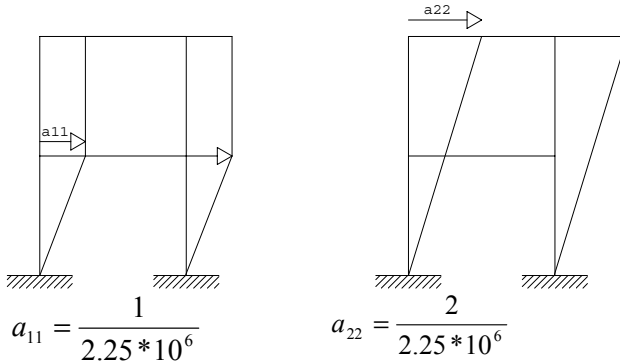
$$\frac{12 \cdot 10^4}{2.25 \cdot 10^6} + 5.3 \cdot 10^{-2}$$

$$\omega^2 \approx g \frac{6 \cdot 10^4 (8.0 \cdot 10^{-2} + 5.3 \cdot 10^{-2})}{6 \cdot 10^4 [(8.0 \cdot 10^{-2})^2 + (5.3 \cdot 10^{-2})^2]} = g \frac{13.3 \cdot 10^{-2}}{9.21 \cdot 10^{-3}} = 144.4$$

$$\tilde{f}_1 = \frac{\sqrt{144.4}}{2\pi} = 1.91 \text{ Hz}$$

d) Usar o método de Dunkerley para estimar a frequência natural fundamental do caso I, e usando os resultados exatos da frequência fundamental (b), estimar a frequência natural do 2º modo de maneira aproximada.

DUNKERLEY



$$a_{11} = \frac{1}{2.25 \cdot 10^6}$$

$$a_{22} = \frac{2}{2.25 \cdot 10^6}$$

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_1^2} \approx \frac{1}{\tilde{\omega}_1^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}_2^2} = m_1 a_{11} + m_2 a_{22} = \frac{6000 \cdot 3}{2.25 \cdot 10^6} = 8 \cdot 10^{-3}$$

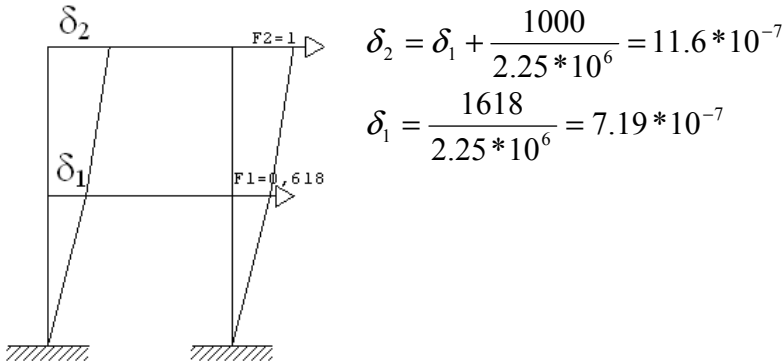
$$\tilde{\omega}_1^2 \approx 125 \quad \tilde{\omega}_1 \approx 11.18 \text{ Rad/s} \quad \tilde{f}_1 \approx 1.78 \text{ Hz}$$

$$\omega_1 = 11.97 \text{ Rad/s} \quad \omega_1^2 = 143.3; \frac{1}{\omega_1^2} = 6.97 * 10^{-3}$$

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_2^2} = \frac{1}{\tilde{\omega}_1^2} + \frac{1}{\omega_1^2} = 8.0 * 10^{-3} - 6.97 * 10^{-3} = 1.03 * 10^{-3}$$

$$\tilde{\omega}_2^2 = 971 \quad \tilde{\omega}_2 = 31.2 \text{ Rad/s} \quad \tilde{f}_2 = 4.95 \text{ Hz}$$

Ex. 9 - a) Analisar os deslocamentos estáticos resultantes de aplicar na estrutura do caso I do exemplo 8, forças generalizadas colineares com cada uma das formas modais. Visualizar que as deformadas resultam proporcionais a cada uma das formas modais.



$$\begin{aligned} \delta_2 &= F_2 * 1.16 * 10^6 \\ \delta_1 &= F_1 * 1.16 * 10^6 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = 1.16 * 10^{-6} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

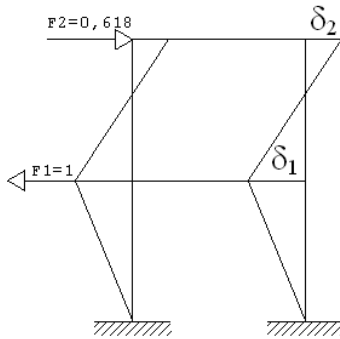
Observe-se: $K\phi_j = \omega^2 M\phi_j$ (para as formas modais), neste caso, $M = mI$ o que implica:

$$K\phi_j = m\omega_j^2 \phi_j \Rightarrow \phi_j = K \left(\frac{1}{m\omega_j^2} \phi_j \right) \text{ lembrando que } F_1 = KX_1 \text{ significa que}$$

X_1 é a deformada resultante da aplicação da força F_1 e que $\frac{1}{m\omega_j^2} \phi_j$ seria a deformada da aplicação da força ϕ_j .

$$\text{Para o nosso caso: } \left\{ \begin{matrix} m = 6000 \\ \omega_j^2 = 143.25 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{m\omega_j^2} = 1.16 * 10^{-6}$$

Da mesma maneira:



$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{0.618}{2.25 * 10^6} = 1.05 * 10^{-7} = 1.7 * 10^{-7} F_2$$

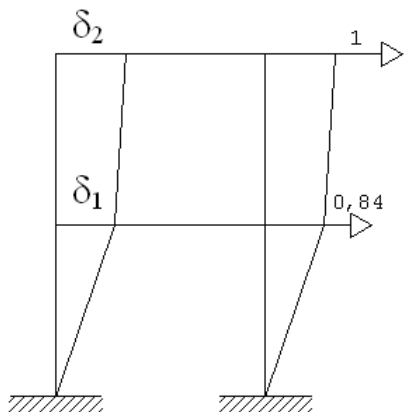
$$\delta_1 = \frac{-0.382}{2.25 * 10^6} = -1.7 * 10^{-7} = 1.7 * 10^{-7} F_2$$

$$[\delta] = 1.7 * 10^{-7} [F]$$

$$\tilde{\omega}_2^2 = 981.75 \quad \frac{1}{m\omega_2^2} = 1.7 * 10^{-7}$$

b) Fazer as mesmas operações feitas em (a), mas agora para o caso II. Segue-se cumprindo o mesmo? Por quê?

$$m_1 = 10000 \quad m_2 = 2000$$



$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{1000}{2.25 * 10^6} = 12.6 * 10^{-7}$$

$$\delta_1 = \frac{1840}{2.25 * 10^6} = 8.18 * 10^{-7}$$

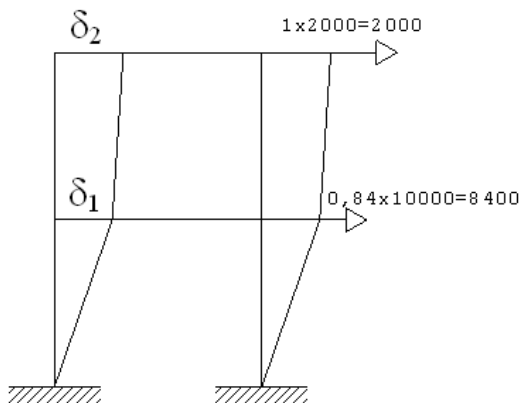
$$\delta_2 = 12.6 * 10^{-7} F_2$$

$$\delta_1 = 8.18 * 10^{-7} F_1$$

$[\delta]$ não resulta colinear a $[F]$

Observe-se: neste caso, M não é proporcional a $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$K\phi_j = \omega^2 M\phi_j$. Se fosse aplicada uma força generalizada $M\phi_j$:



$$\delta_2^* = \delta_1^* + \frac{2000}{2.25 * 10^6} = 5.51 * 10^{-3}$$

$$\delta_1^* = \frac{10400}{2.25 * 10^6} = 4.62 * 10^{-3}$$

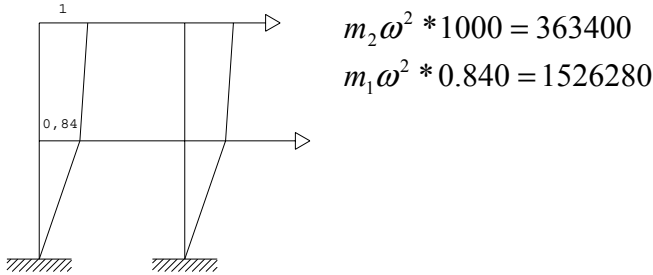
$$\delta_1^* = 5.51 * 10^{-3} \phi_2$$

$$\delta_1^* = 5.51 * 10^{-3} \phi_1$$

$$[\delta^*] = 5.51 * 10^{-3} [\phi]$$

Repare que: $\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{181.7} = 5.5 * 10^{-3}$

Se fosse aplicada uma força generalizada $\omega^2 M \phi_j$ a deformada seria idêntica à força modal.



c) Conclusões ao respeito das diferenças entre I e II

Se aplicarmos forças generalizadas proporcionais a $\omega_j^2 M \phi_j$, a deformada seria proporcional à forma modal.

Em particular, se a matriz M resulta proporcional a I (massas iguais associadas a cada uma das coordenadas) $\omega_j^2 M \phi_j$ resulta colinear com ϕ_j , e por isso a particularidade do caso 1.

Ex. 10 – No nível intermédio da estrutura do caso I do exemplo 8, foi montada uma máquina cuja frequência operacional é 2 Hz e gera uma excitação horizontal de amplitude 100 kgf.

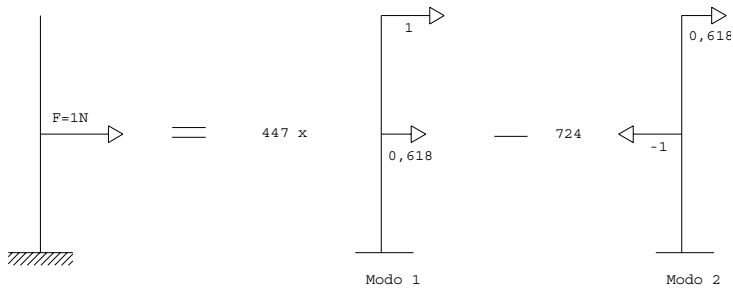
Estimar a resposta estacionária nos 2 níveis estrutura induzida pela excitação.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0.618 \\ 1000 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1000 \\ 0.618 \end{bmatrix}$$

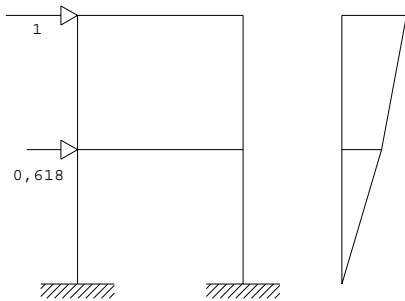
$$0.618\alpha - \beta = 1$$

$$\alpha + 0.618\beta = 0 \quad \beta = -0.618\alpha$$

$$2236\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0.447 \quad \beta = -0.724$$

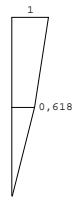


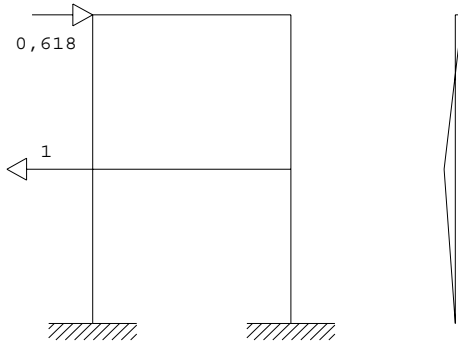
Efeito estático unitário nos modos



$$7.2 * 10^{-7} + \frac{1}{2.25 * 10^6} = 11.7 * 10^{-7}$$

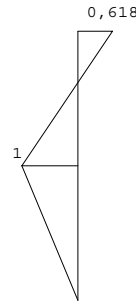
$$\frac{1618}{2.25 * 10^6} = 7.2 * 10^{-7}$$





$$-7.2 * 10^{-7} + \frac{0.618}{2.25 * 10^6} = 1.05 * 10^{-7}$$

$$\frac{-1 + 0.618}{2.25 * 10^6} = -1.7 * 10^{-7}$$



Amplitudes resultantes no 1º modo:

$$f = 2Hz \quad f_1 = 1.91Hz \quad r_1 = 1047 \quad M_1 = 10.15$$

$$|\delta_{dyn}^{(1)}| = \underbrace{M_1 * 447 * 11.7 * 10^{-7}}_{5.31 * 10^{-3}} |\phi_1| = \begin{cases} 5.31mm & 2^\circ \text{ andar} \\ 3.28mm & 1^\circ \text{ andar} \end{cases}$$

Amplitudes resultantes no 2º modo:

$$f = 2Hz \quad f_2 = 4.99Hz \quad r_2 = 0.4 \quad M_2 = 1.19$$

$$|\delta_{dyn}^{(2)}| = \underbrace{M_2 * 724 * 1.7 * 10^{-7}}_{1.46 * 10^{-4}} |\phi_2| = \begin{cases} 0.09mm & 2^\circ \text{ andar} \\ 0.15mm & 1^\circ \text{ andar} \end{cases}$$

O efeito do segundo modo é irrelevante.

$$\delta_{dyn} \sim \begin{cases} 5.31mm & 2^\circ \text{ andar} \\ 3.28mm & 1^\circ \text{ andar} \end{cases}$$

$$\omega = 2\pi f = 12.57 \text{ Rad/s}$$

$$|v| \sim \begin{cases} 67 \text{ mm/s} & 2^\circ \text{ andar} \\ 41 \text{ mm/s} & 1^\circ \text{ andar} \end{cases}$$

$$|a| \sim \begin{cases} 84 \text{ cm/s}^2 & 2^\circ \text{ andar} \\ 52 \text{ cm/s}^2 & 1^\circ \text{ andar} \end{cases}$$

A aceleração máxima será no segundo andar.

$$a = 0.84 \text{ m/s}^2 = 8.4\%g$$

Obs: Outra maneira de se obter a decomposição da força nos modos é:

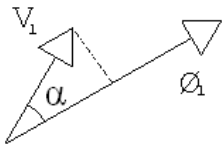
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0.618 \\ 1000 \end{bmatrix} \quad ???_{\phi_1}(\vec{v}_1) = \frac{\vec{v} * \vec{\phi}_1}{|\phi_1|^2} * \phi_1$$

$$\vec{v} * \phi_1 = 1 * 0.618 + 0 * 1000 = 0.618$$

$$\vec{v} * \phi_1 = 1 * 0.618 + 0 * 1000 = 0.618$$

$$|\phi_1|^2 = 1000^2 + 0.618^2 = 1382$$

$$???_{\phi_1}(\vec{v}_1) = \frac{0.618}{1382} * \phi_1 = 0.447\phi_1$$



$$???_{\phi_2}(\vec{v}_1) = \frac{\vec{v} * \vec{\phi}_2}{|\phi_2|^2} * \phi_2 = \frac{-1}{1382} \quad \phi_2 = -0.724\phi_2$$

$$\vec{v}_1 * \vec{\phi}_1 = |\vec{v}_1| |\vec{\phi}_1| \cos \alpha$$

Anexo K. Bibliografia

Geral:

1. Elementos Finitos, Análise Dinâmica- Prof. Dr. Avelino Alves Filho.
2. Teoria das Vibrações- William T. Thomson
3. Structural Vibration: Analysis and Damping - C. F. Beards
4. Formulas for Structural Dynamics- I.A. Karnovski
5. Structural Dynamics: Theory and Computation- Mario Paz
6. Fundamentals of Structural Dynamics- R. R. Craig
7. Dynamics of Structures- Ray W. Clough, Joseph Penzien.
8. Introduction to Finite Element Vibration Analysis- Maurice Petyt
9. Mechanical Vibrations- Jacob Pieter Den Hartog
10. Computational Structural Dynamics- Kosta Talaganov, Gunther Schmidt
11. Vibration and Waves- R.V. Sharman
12. Dynamics of Structures- A.K. Chopra
13. Harris' Shock and Vibration Handbook- Cyril M. Harris
14. Introduction to Structural Dynamics- Bruce K. Donaldson
15. Structural Dynamic Systems- C.T. Leondes
16. Structural Dynamics: Theory and Applications- J. W. Tedesco, W. G. McDougal
17. Fourier Analysis- M.R. Spiegel
18. Análisis de Fourier - Hwei P Hsu
19. Introduction to Structural Dynamics- John M. Biggs
20. Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures – W. Gavronsky
21. Structural Dynamics for the Practicing Engineer - H.Max Irvine

Efeitos devidos a Maquinarias:

22. Soil Motion Under Vibration Foundations- John Vivian Perry Jr.
23. ISO 1940-1- 1986 - Mechanical Vibration –Balance quality requirements of rigid rotors- International Standards Organization,
24. Practical Foundation Engineer Handbook - Robert Wade Brown.
25. Algumas notas acerca do comportamento mecânico dos solos- Jaime A. Santos
26. Soil Mechanics – Arnold Verruijt
27. Soil Mechanics- R. F. Craig
28. Dynamic Soil-Structure Interaction - C. Zhang, J.P. Wolf

29. Foundations of Theoretical Soil Mechanics- M.E. Harr
30. Soil Mechanics in Engineering Practice- K. Terzaghi
31. Moderne Funderingstechniken- A.F. van Weele
32. Soil Mechanics and Foundations- C.R. Scott
33. BASIC Soil Mechanics- G.W.E. Milligan and G.T. Houlsby
34. Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines- Suresh Arya, Michael O'Neill and George Pincus
35. Dynamics of Rotating Machinery – J.H.Kim
36. Vibration of machine tools – G. Sweeney
37. Machinery Vibration: Balancing-V. Wowk
38. Vibration Analysis of Rotors- Chong-Won
39. Handbook of Rotordynamics –F. Ehrich
40. Machine Tool Vibration- S.A. Tobias

Efeitos devidos a Atividades Humanas:

41. Vibration Problems in Structures- Hugo Bachmann
42. Floor Vibrations Due to Human Activity - Thomas M. Murray
43. Building Vibration from Human Activities- D.E. Allen
44. Transient Response to Step and Pulse Functions– R. S. Ayre
45. Guide for the Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration - International Standards Organization.
46. Response of cantilever grandstands to crowd loads- B. R. Ellis e J.D. Litter
47. Springiness and Human-Induced Floor – S. V. Ohlsson
48. Design Guide on the Vibration of Floors – T. A Wyatt

Efeitos devidos ao Vento:

49. Introdução ao Estudo das Ações Dinâmicas do Vento- J. Blessmann
50. Acidentes Causados pelo Vento - J. Blessmann
51. Ação do Vento Em Edifícios -- J. Blessmann
52. Wind Loading of Structures- John D. Holmes
53. Wind Effects on Structures: Fundamentals and Applications to Design- Emil Simiu
54. O “Vento Sintético” e a Análise Dinâmica das Estruturas de Grande Altura no Domínio do Tempo- Boletim da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações- Prof. Mario Franco.
55. Acción dinámica del viento sobre las construcciones- H. Fernández Long
56. Turbulence – J. O. Hinze

Engenharia Sismo-resistente:

57. Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings- T.Paulay, M. J. N. Priestley
58. Design for Earthquakes- J. Ambrose, D. Vergun
59. Earthquake Resistant Engineering Structures - C.A. Brebbia, G. Oliveto
60. International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology- W H.K. Lee, H. Kanamori, P. Jennings, C.Kisslinger
61. Elementos de Ingenieria Sísmica- A. A. Beles
62. The Seismic Design Handbook – F. Naeim
63. Design of Earthquake-resistant Buildings- M. Wakabayashi
64. Earthquake Spectra and Design- N.M. Newmark, W. Hall
65. Design of Earthquake Resistant Structures- Emilio Rosenblueth
66. Simplified P-Delta analyses for asymmetric structures- A.Rutenberg
67. Earthquake Engineering: Application to Design – C. K. Erdey



TQS Informática Ltda
R. dos Pinheiros, 706 c/2 São Paulo SP 05422-001
Tel (011) 3083-2722 Fax (011) 3083-2798
tqs@tqs.com.br www.tqs.com.br

TQS